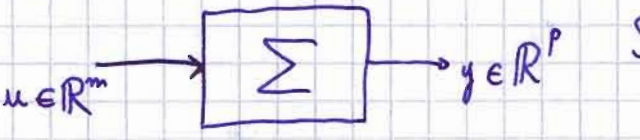
SISTEMI MULTIVARIABILI

martedì 16:30 - 18:30
Venerdì 8:30 - 10:30 + 14:30 - 16:30
(9:05)

12/10/10

Si tratteranno sempre sistemi dinamici, ma non più di sistemi scalari (1 ingresso e 1 uscita) ma sistemi in cui ho TANTI INGRESSI e TANTE USCITE.

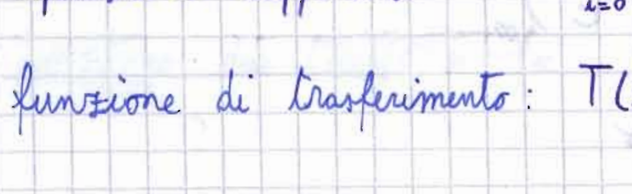


Sistema dinamico orientato

In controlli automatici $(m=p=1)$ i modelli matematici utilizzati erano:

- equazioni differenziali: $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i u(t)$
- funzione di trasferimento: $T(s) = \dfrac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$

I difetti di queste rappresentazione sono legati alle condizioni iniziali $y(0), Dy(0), \dots, D^{n-1}y(0), u(0), Du(0), \dots, D^{m-1}u(0)$.
In generale, le condizioni iniziali sono DISCONTINUE, ovvero $y(0^-) \neq y(0^+)$, in quanto $u(t)$ e $y(t) \in PC^\infty$ ovvero alle funzioni continue tranne in un numero finito di punti.



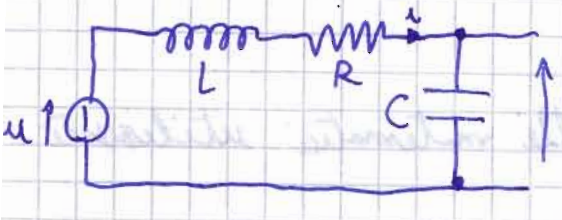
Il vettore delle condizioni iniziali dell'uscita è discontinuo, il che è un grosso difetto.

Negli anni '50 si superò questo problema con il MODELLO DELLE VARIABILI DI STATO o MODELLO DI STATO, che si presta molto bene per descrivere i sistemi multivariabili e quelli dinamici non lineari.

I sistemi che consideriamo sono ipotizzati lineari.

Il modello di stato permette di passare da un'equazione differenziale di ordine n a un sistema differenziale di più equazioni di ordine 1.

Esempio (Circuito RLC)



$$\begin{cases} u = L \cdot Di + R \cdot i + \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i(\rho)\, d\rho \\ y = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i(\rho)\, d\rho \end{cases}$$

Dalla seconda derivando ottengo

$$Dy = \frac{1}{C} \cdot i \implies i = C \cdot Dy$$

Sostituendo nella prima ottengo

$$u = LD(CDy) + RCDy + y$$

$$u = LCD^2y + RCDy + y$$

Passo ora al modello di stato. Individuo gli elementi "di memoria" del sistema. Nel caso del circuito elettrico mi riferisco a correnti e tensioni:

$x_1 \triangleq i$ corrente

$x_2 \triangleq y$ tensione di uscita

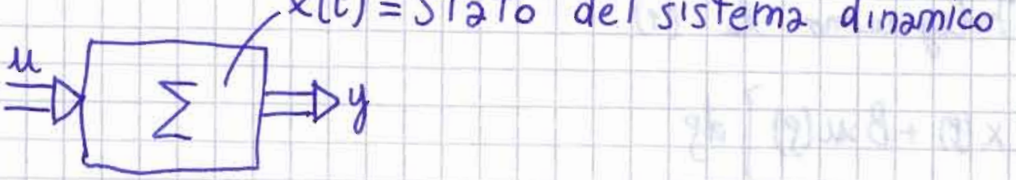
Se vado a sostituire ottengo:

$$\begin{cases} x_1 = C \cdot \dot{x}_2 \\ L\dot{x}_1 + Rx_1 + x_2 = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C} x_1 \\ \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L} x_1 - \dfrac{1}{L} x_2 + \dfrac{1}{L} u \end{cases}$$

poi posso aggiungere l'equazione dell'uscita

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L} x_1 - \dfrac{1}{L} x_2 + \dfrac{1}{L} u \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C} x_1 \\ y = x_2 \end{cases}$$



$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$ variabile vettoriale interna

Risulta molto comodo esprimere il modello nella forma matriciale

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Per il modello di stato, le condizioni iniziali sono date dal valore dello stato in un certo istante di tempo.
Di fatto, lo stato x rappresenta la MEMORIA del sistema.

In generale:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) & (1) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) & (2) \end{cases}$$

A, B, C, D sono matrici

$u(t) \in \mathbb{R}^m \qquad x(t) \in \mathbb{R}^n$

$y(t) \in \mathbb{R}^p$

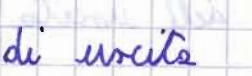
$A \in M_{n \times n}$ matrice di sistema

$B \in M_{m \times n}$ matrice degli ingressi

$C \in M_{p \times n}$ matrice di uscita

$D \in M_{m \times p}$ matrice di relazione algebrica

$\mathbb{R}^n$ viene chiamato SPAZIO DEGLI STATI. $\dot{x}(t)$ è il vettore tangente alla traiettoria.



Una prima proprietà di $x(t)$ si ricava dalla (1) ed è la proprietà di continuità. Integriamo la (1):

$$\int_0^t \dot{x}(\rho)\, d\rho = \int_0^t \left[A x(\rho) + B u(\rho) \right] d\rho$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \left[A x(\rho) + B u(\rho) \right] d\rho$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \left[A x(\rho) + B u(\rho) \right] d\rho \quad \text{Rappresentazione integrale della (1)}$$

Dalla rappresentazione integrale notiamo che $x(t)$ è continua anche in presenza di ingressi discontinui ($u(t)$).

Matrice di trasferimento

È l'analogo della funzione di trasferimento e vale per i sistemi multivariabili.

$$Y(s) = \mathcal{L}\left[y(t) \right] \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{L}\left[y_1(t) \right] \\ \vdots \\ \mathcal{L}\left[y_p(t) \right] \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \mathcal{L}\left[x(t) \right]$$

$$U(s) = \mathcal{L}\left[u(t) \right]$$

Ricordando le proprietà $\mathcal{L}[Df(t)] = sF(s) - f(0^+)$ e ipotizzando nullo lo stato iniziale, si ottiene:

$$\begin{cases} sX(s) - X(0^+) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Imponiamo quindi $X(0) = X(0^+) = 0$ (sistema inizialmente in quiete)

$$\begin{cases} sX(s) - AX(s) = BU(s) \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} (sI - A)X(s) = BU(s) \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) = C(sI-A)^{-1}BU(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ Y(s) = \underbrace{\left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]}_{\text{MATRICE DI TRASFERIMENTO } \in \mathbb{R}^{p \times m}} U(s) \end{cases}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{p1}(s) & \dots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

La matrice di trasferimento è formata da tante funzioni di trasferimento scalari.

Venerdì 5 novembre: 1° compitino
2° compitino prima di Natale oppure Scritto completo
3° compitino a gennaio
\+ orale

Basile Marro: Controlled and conditioned invariation in linear systen theory.

Campo $\mathbb{F}$ → insieme con elementi detti scalari e con le operazioni $+$ e $\cdot$ che soddisfano le proprietà commutativa, distributiva e associativa.

Spazio vettoriale → insieme con elementi detti vettori e con le operazioni $+$ e $\cdot$ con varie proprietà.

L'estremo superiore essenziale permette di scartare i punti che divergono all'infinito in quanto la loro misura è nulla, essendo punti.

Sottospazio → dato uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ su $\mathbb{F}$, un sottoinsieme $\mathcal{X}$ di $\mathcal{V}$ è un sottospazio di $\mathcal{V}$ se $\alpha x + \beta y \in \mathcal{X} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

Proprietà: se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{V}$ sottospazi $\Rightarrow$ $\mathcal{X}+\mathcal{Y}$ sottospazio di $\mathcal{V}$

__Dim.__ Dato $z_1, z_2 \in \mathcal{X}+\mathcal{Y}$ posso scrivere che $z_1 = x_1 + y_1$ e $z_2 = x_2 + y_2$

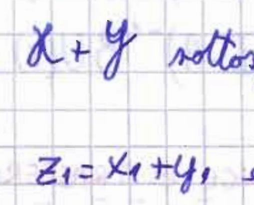
Devo dimostrare che $\alpha z_1 + \beta z_2 \in \mathcal{X}+\mathcal{Y}$.

$$\alpha z_1 + \beta z_2 = \alpha(x_1+y_1) + \beta(x_2+y_2) = \underbrace{(\alpha x_1 + \beta x_2)}_{\in \mathcal{X}} + \underbrace{(\alpha y_1 + \beta y_2)}_{\in \mathcal{Y}} . \quad \blacksquare$$

Somma Diretta

Siano $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z}$ 3 sottospazi di $\mathcal{V}$. La somma diretta impone che

$$\begin{cases} \mathcal{X}+\mathcal{Y} = \mathcal{Z} \\ \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0_v \end{cases} \iff \underset{\substack{\uparrow \\ \text{somma diretta}}}{\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}} = \mathcal{Z}$$



$\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$

Proprietà

$$D(z) = \{(x,y) : x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y},\ x+y = z\}$$
$$D_1 = \{(x,y) : x = x_1 + w,\ y = y_1 - w,\ w \in \mathcal{X}+\mathcal{Y}\}$$
$$\Rightarrow D_1 = D(z)$$

Dim.

1. $(x,y) \in D(z)$

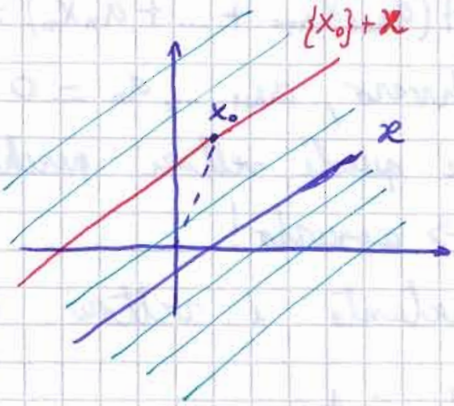
$$x + y = z \qquad x_1 + y_1 = z$$
$$x + y = x_1 + y_1$$
$$x - x_1 = y_1 - y \triangleq w \Rightarrow w \in \mathcal{X},\ w \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow w \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$$
$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + w \\ y = y_1 - w \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) \in D_1$$

2. $(x,y) \in D_1$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + w \\ y = y_1 - w \end{array}\right\} \Rightarrow x + y = x_1 + y_1 = z \Rightarrow (x,y) \in D(z) \quad \blacksquare$$

Varietà Lineare

Sia $x_0 \in V$, $\mathcal{X} \subseteq V$, il sottoinsieme di V
$$\{x_0\} + \mathcal{X} := \{z \in V : z = x_0 + x,\ x \in \mathcal{X}\}$$
è una varietà lineare contenuta in V



Spazio Quoziente

Sia $\mathcal{X} \subseteq V$. L'insieme
$$V/\mathcal{X} := \{m \text{ varietà lineare di } V;\ m = \{v\} + \mathcal{X},\ v \in V\}$$
è uno spazio quoziente

nel caso di sopra, lo spazio quoziente è il fascio di rette // a $\mathcal{X}$

Span di vettori o Spazio Generato

È l'insieme di tutte le combinazioni lineari di i vettori.

Teorema

Sia $A: V \rightarrow W$ una trasformazione lineare con $\dim(V) = n$. Allora

$$\rho(A) + \nu(A) = \dim(V) \qquad \rho(A) = \text{rango di } A$$

Dim.

Prendo $\{x_1, x_2, \dots, x_h\}$ una base di Ker A e $\{x_1, \dots, x_h, x_{h+1}, \dots, x_n\}$ una base di V. Ottengo:

$$\rho(A) = \dim(V) - \nu(A) = n - h \overset{?}{=} \dim(\operatorname{Im} A)$$

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{span}\{\underset{0}{A(x_1)}, \underset{000}{\dots}, \underset{0}{A(x_h)}, A(x_{h+1}), \dots, A(x_n)\} = \operatorname{span}\{A(x_{h+1}), \dots, A(x_n)\}$$

perchè nel Ker di A.

Devo trovare che questi vettori sono linearmente indipendenti. Se, per assurdo, non lo fossero avrei:

$\alpha_{h+1} \cdot A(x_{h+1}) + \dots + \alpha_n A(x_n) = 0$ ma per linearità

$A(\alpha_{h+1} x_{h+1} + \dots + \alpha_n x_n) = 0$ che significa che $(\alpha_{h+1} x_{h+1} + \dots + \alpha_n x_n) \in \operatorname{Ker} A$

Ovvero, $\alpha_{h+1}, \dots, \alpha_n = 0$ perchè quel vettore non può essere generato da questi vettori perchè non appartengono alla base di Ker A.

$\rightarrow$ assurdo!

Pertanto i vettori sono linearmente indipendenti. ▨

Proprietà

A è iniettiva se e solo se $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

Dim.

1) A iniettiva $\Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{0\}$

Se A è iniettiva, siano $x_1, x_2 \in V$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow A(x_1) \neq A(x_2)$

Per assurdo, sia $x_1 \in V$ t.c. $x_1 \neq 0$, $A(x_1) = 0$. Sia poi $x_2 = 0$, ma $A(x_2) = 0$. Ottengo $x_1 \neq x_2$ ma $A(x_1) = A(x_2)$. Assurdo!!

$\Rightarrow \operatorname{Ker} A\{0\}$.

2) $\operatorname{Ker} A = \{0\} \Longrightarrow A$ è iniettiva.

Per assurdo, se A non fosse iniettiva $\exists\, x_1, x_2 \in V$ tali che $x_1 \neq x_2$ e $A(x_1) = A(x_2)$.

$x_1 - x_2 \neq 0$ e $A(x_1 - x_2) = 0$

Proprietà

A è iniettiva se e solo se trasforma insiemi linearmente indipendenti in insiemi linearmente indipendenti.

Dim.

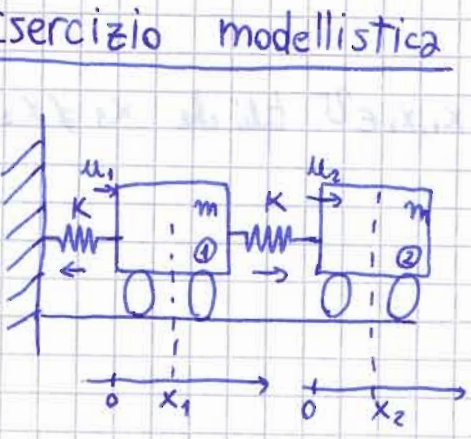
1) A iniettiva, $\{x_1, \dots, x_n\}$ lin. indip. $\Longrightarrow \{A(x_1), \dots, A(x_n)\}$ lin. indip.

Se così non fosse, per assurdo, $\exists\, \alpha_i$ non tutti nulli tali che $\alpha_1 A(x_1) + \dots + \alpha_n A(x_n) = 0$. Per linearità $A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = 0$, cioè $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \in \operatorname{Ker} A$, ma essendo A iniettiva per la relazione precedente $\alpha_i = 0 \;\forall i$. Assurdo!

2) $\{x_1, \dots, x_n\}$ lin. indip., $\{A(x_1), \dots, A(x_n)\}$ lin. indip. $\Longrightarrow A$ iniettiva, cioè $\operatorname{Ker} A = \{0\}$

Per assurdo, $\exists\, x_1 \in V$ tale che $x_1 \neq 0$ e $A(x_1) = 0$. Considero $\{x_1, x_2\}$ linearmente indipendenti. Trasformando, otterrei $\{A(x_1), A(x_2)\}$, ma $A(x_1) = 0$ e quindi è assurdo! Stessa cosa se considerassi $\{x_1\}$, il quale ha $A(x_1) = 0$ e quindi non è più linearmente indipendente. Assurdo! ◻

Esercizio modellistica



Determinare il modello di stato di questo sistema meccanico.

$$\begin{cases} m\,D^2 x_1 = -Kx_1 + K(x_2 - x_1) + u_1 \\ m\,D^2 x_2 = -K(x_2 - x_1) + u_2 \end{cases}$$

massa per accelerazione

Per costruire il vettore di stato guardo posizioni e velocità:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad x_3 \triangleq \dot{x}_1, \quad x_4 \triangleq \dot{x}_2$$

x_1, x_2 sono le posizioni

x_3, x_4 sono le velocità

1) $\dot{x}_1 = x_3$

2) $\dot{x}_2 = x_4$

3) $m\,D(Dx_1) = m\,D\,x_3 = m\dot{x}_3 = -2Kx_1 + Kx_2 + u_1$

$\dot{x}_3 = -\frac{2K}{m}x_1 + \frac{K}{m}x_2 + \frac{1}{m}u_1$

4) $m\,D(Dx_2) = m\,D\,x_4 = m\dot{x}_4 = -Kx_2 + Kx_1 - u_2$

$\dot{x}_4 = -\frac{K}{m}x_2 + \frac{K}{m}x_1 - \frac{u_2}{m}$

Scelgo poi le uscite $y \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

lo scelgo io

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{2K}{m}x_1 + \frac{K}{m}x_2 + \frac{1}{m}u_1 \\ \dot{x}_4 = \frac{K}{m}x_1 - \frac{K}{m}x_2 + \frac{1}{m}u_2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Longrightarrow \text{Trasformo in forma matriciale}$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matrice di sistema} \\ A}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matrice dei controlli} \\ B}} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matrice } C} x$$

In questo caso non c'è una matrice D. Per ricavare $G(s)$ posso

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

INTERPRETAZIONE DINAMICA DEL CONCETTO DI INVARIANTE

$\dot{x} = Ax + \underbrace{Bu}_{0 \; u=0}$

$x \in \mathbb{R}^3$

$\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^3$ invariante su A

Se lo stato iniziale è sull'invariante (x_0), anche la traiettoria lo sarà, proprio perché $\mathcal{I}$ è invariante (il vettore velocità permane sul piano stesso)

Esercizio modellistica (es. 2, esercitazione 1)

$$\begin{cases} \dfrac{(u - x_1)}{R} = CDx_1 + 2\dfrac{x_1}{R} \\ y = x_2 \\ \dfrac{x_1}{R} \pm CDx_2 + \dfrac{x_2}{R} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u - x_1 = RC\dot{x}_1 + 2x_1 \\ y = x_2 \\ x_1 + RC\dot{y} + y = 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ

$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vale $\operatorname{Ker} A^T = (\operatorname{im} A)^\perp$ (vale anche $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{im} A^T)^\perp$)

DIM.

Se $y \in \operatorname{Ker} A^T \Rightarrow \langle A^T y, x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ essendo $A^T y = 0$

$\Updownarrow$

$\langle y, Ax\rangle = 0$ Ax è un qualunque elemento dell'immagine di A

y è pertanto ortogonale all'immagine di A, pertanto $y \in (\operatorname{im} A)^\perp$.

Se $y \in (\operatorname{im} A)^\perp \Rightarrow \langle y, \underbrace{AA^T y}_{\in \operatorname{im} A}\rangle = 0$ essendo y ortogonale a qualsiasi vettore dell'immagine di A.

$\Updownarrow$

$\langle A^T y, A^T y\rangle = 0$ vera se e solo se $A^T y = 0$, cioè $y \in \operatorname{Ker} A^T$ $\square$

PROPRIETÀ

$\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ vale $\operatorname{im} A = \operatorname{im}(A \cdot A^T)$

DIM.

Nota la proprietà che $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$, $A(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = A\mathcal{X} + A\mathcal{Y}$, in quanto $z \in A\{\mathcal{X}+\mathcal{Y}\}$ $\Rightarrow z = A(\underset{\in \mathcal{X}}{x}+\underset{\in \mathcal{Y}}{y}) = \underset{\in A\mathcal{X}}{Ax} + \underset{\in A\mathcal{Y}}{Ay} \in A\mathcal{X} + A\mathcal{Y}$ e se $z \in A\mathcal{X} + A\mathcal{Y} \Rightarrow \exists x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ tale che $z = Ax + Ay = A(x+y) \in A(\mathcal{X}+\mathcal{Y})$ $\square$

Dimostriamo $\operatorname{im} A = \operatorname{im}(AA^T)$.

$$\operatorname{im} A = A(\mathbb{R}^n) \underset{\text{da prima}}{=} A(\operatorname{im} A^T + \operatorname{Ker} A) \underset{\text{da sopra}}{=} A(\operatorname{im} A^T) + A(\operatorname{Ker} A) = \operatorname{im}(AA^T) + \{0\} = \operatorname{im}(AA^T) \quad \square$$

(e) Dim.

Dato che $(\mathcal{X}+\mathcal{Y})^\perp = \mathcal{X}^\perp \cap \mathcal{Y}^\perp$ vale per tutti gli $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, posso sostituire a $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ i loro ortogonali e ottengo esattamente

$(\mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}^\perp)^\perp = (\mathcal{X}^\perp)^\perp \cap (\mathcal{Y}^\perp)^\perp = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ faccio il complemento ortogonale di entrambi i membri e segue la tesi:

$$\mathcal{X}^\perp + \mathcal{Y}^\perp = (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})^\perp$$

h) Dim.

$A^{-1}\mathcal{X} = \{z : Az \in \mathcal{X}\}$

$A^{-1}\mathcal{Y} = \{z : Az \in \mathcal{Y}\}$

$A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) = \{z : Az \in \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}\}$

1. $A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) \subseteq A^{-1}\mathcal{X} \cap A^{-1}\mathcal{Y}$

$z \in A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) \Rightarrow Az \in \mathcal{X}$ e $Az \in \mathcal{Y} \Rightarrow z \in A^{-1}\mathcal{X}$ e $z \in A^{-1}\mathcal{Y}$ ■

2. $A^{-1}\mathcal{X} \cap A^{-1}\mathcal{Y} \subseteq A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$

$z \in A^{-1}\mathcal{X}\cap A^{-1}\mathcal{Y} \Rightarrow Az \in \mathcal{X}$ e $Az \in \mathcal{Y} \Rightarrow Az \in \mathcal{X}\cap\mathcal{Y} \Rightarrow z \in A^{-1}(\mathcal{X}\cap\mathcal{Y})$ ■

Proprietà 1

Dim. Se $\mathcal{X} \overset{\text{è contenuto}}{\subseteq} \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{X}\cap(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) + (\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$ infatti $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X} + (\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$

Se $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z} \Rightarrow$ "

Se $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \Rightarrow$ "

Se $\mathcal{X} \supseteq \mathcal{Y} \Rightarrow$ "

Se $\mathcal{X} \supseteq \mathcal{Z} \Rightarrow$ "

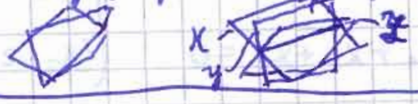
Se $\mathcal{Y} \supseteq \mathcal{Z} \Rightarrow$ "

$\mathcal{X}\cap(\mathcal{Y}+\mathcal{Z}) \supseteq \mathcal{X}\cap\mathcal{Y} + \mathcal{X}\cap\mathcal{Z}$

$z \in (\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}) + (\mathcal{X}\cap\mathcal{Z})$ $\quad z = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathcal{X},\mathcal{Y}$, $x_2 \in \mathcal{X},\mathcal{Z}$

$\Rightarrow z \in \mathcal{X}$ perchè $x_1 \in \mathcal{X}$ e $x_2 \in \mathcal{X}$

$\Rightarrow z \in \mathcal{Y}+\mathcal{Z}$ perchè $x_1 \in \mathcal{Y}$ e $x_2 \in \mathcal{Z}$ ■



$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Proprietà $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \Leftrightarrow A^T\mathcal{Y}^\perp \subseteq \mathcal{X}^\perp$

Dim.

$A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y} \Rightarrow \forall x \in \mathcal{X}, \{Ax \in \mathcal{Y}\} \overset{(\mathcal{Y}^\perp)^\perp = \mathcal{Y}}{\Leftrightarrow} \{Ax$ è ortogonale a tutti i vettori di $\mathcal{Y}^\perp\}$

$\Leftrightarrow \langle Ax, z\rangle = 0 \;\; \forall z \in \mathcal{Y}^\perp \Leftrightarrow \langle x, A^Tz\rangle = 0 \;\; \forall z \in \mathcal{Y}^\perp \Leftrightarrow A^Tz \in \mathcal{X}^\perp \;\; \forall z \in \mathcal{Y}^\perp \Leftrightarrow A^T\mathcal{Y}^\perp \subseteq \mathcal{X}^\perp$ ■

Proprietà $(A^{-1}\mathcal{Y})^\perp = A^T\mathcal{Y}^\perp$

Dim.

Y matrice di base di $\mathcal{Y}^\perp$: $\operatorname{im} Y = \mathcal{Y}^\perp$

$\operatorname{im} Y \underset{\text{già visto}}{=} (\operatorname{Ker} Y^T)^\perp \Leftrightarrow \mathcal{Y}^\perp = (\operatorname{Ker} Y^T)^\perp \Leftrightarrow \mathcal{Y} = \operatorname{Ker} Y^T$

$A^T\mathcal{Y}^\perp = A^T(\operatorname{im} Y) = \operatorname{im}(A^TY) = (\operatorname{Ker} Y^TA)^\perp = (\{z : Y^T\overset{\text{vettore}}{Az} = 0\})^\perp = (\{z : Az \in \operatorname{Ker} Y^T\})^\perp =$

$= (\{z : Az \in \mathcal{Y}\})^\perp = (A^{-1}\mathcal{Y})^\perp$ ■

ESERCITAZIONE 1

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad im A = ?$ $\quad Ker A = ?$

Se $rg A = 3$, i tre vettori sono l. i. e costituiscono una base, per cui $im A = \mathbb{R}^3$ e $Ker A = \{0\}$.

$\det A = 3+3+2(-6+3) = 0$ infatti la somma delle ultime due colonne dà la prima.

$im A$ = trovare una matrice di base del sottospazio $= im \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\dim im A = 2$.

$Ker A$ = deve essere $\dim Ker A = 1$ perché $\dim(im A) + \dim(Ker A) = \nu(A) = 3$.

Studio $Ax = 0$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_2 \\ x_2 = x_3 \\ (x_2 - 2x_2)\cdot 2 + x_2 + x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_2 \\ \cancel{0=0}\ x_2 = x_2 \end{cases}$

combinazione lineare delle precedenti →

$Ker A = im \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

④ $\mathcal{X} = im \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ calcolare $\mathcal{X}^\perp$

$\mathcal{X}^\perp = \{ y : \langle y, x \rangle = 0 \ \forall x \in \mathcal{X} \}$ $\qquad x \in \mathcal{X}$ tale che $x = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\langle y, x \rangle = \langle y, \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle = 0 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$= \alpha_1 \langle y, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle + \alpha_2 \langle y, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} [1,1,0] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \\ [0,-1,3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ -y_2 + 3y_3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 = -y_2 \\ y_2 = y_2 \\ \end{cases}$ $\qquad \mathcal{X}^\perp = im \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

⑤

(a) $\mathcal{V}_1 = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{im}\begin{bmatrix}2\\ -4\\ 3\end{bmatrix}$

$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ devo trovare una matrice di base. Stabilisco se sono lin. ind.

$\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix} = 3+4-2 = 5 \neq 0 \Rightarrow rg\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix} = 3 \Rightarrow$ lin. ind. $\Rightarrow \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$

(b) $\mathcal{V}_1 = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$. Il quarto sarà sicuramente l.i., ma non mi interessa: $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} = \operatorname{im} I_3 = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = (\mathcal{V}_1^\perp + \mathcal{V}_2^\perp)^\perp$ uso questo risultato.

$\mathcal{V}_1^\perp : \begin{cases} y_1 + y_3 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$ $\mathcal{V}_1^\perp = \operatorname{im}\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$

$\mathcal{V}_2^\perp : \begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ $\mathcal{V}_2^\perp = \operatorname{im}\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{V}_1^\perp + \mathcal{V}_2^\perp = \operatorname{im}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$(\mathcal{V}_1^\perp + \mathcal{V}_2^\perp)^\perp : \begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ -y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$ $(\mathcal{V}_1^\perp + \mathcal{V}_2^\perp)^\perp = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$

⑥

$\mathcal{X} = \operatorname{im}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ $\mathcal{Y} = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ $\operatorname{im}X = \mathcal{X}$ $\operatorname{im}Y = \mathcal{Y}$

$P = \begin{bmatrix}X & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & Y\end{bmatrix}^{-1}$, $Q = I - P$

$\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = \mathbb{R}^2$

$= \begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$

$$P_x = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 \\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 \end{bmatrix}$$ equazioni che mi danno le coordinate

⑦

$\mathrm{im}\, X = \mathcal{X}$ matrice di base

$$P = X(X^T X)^{-1} X^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \left([2,1] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} [2,1] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} (5)^{-1} [2\ 1] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} [2,1] =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

⑧ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathcal{Y} = \mathrm{im} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^{-1}\mathcal{Y} = (A^T \mathcal{Y}^\perp)^\perp \Rightarrow \mathcal{Y}^\perp : \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 1y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \quad \mathcal{Y}^\perp = \mathrm{im} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^T \mathcal{Y}^\perp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A^T \mathcal{Y}^\perp)^\perp : \begin{cases} -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 = 0 \\ y_3 = y_3 \end{cases} \quad (A^T \mathcal{Y}^\perp)^\perp = \mathrm{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⑨

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{im} A = \mathrm{im} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ costruisco matrice di base

$\det A = -1 + 1 = 0$ la terza colonna è lin. dip. $\Rightarrow \mathrm{im} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{Ker} A^T : A^T y = 0 \quad \begin{cases} y_1 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -y_3 \\ \cancel{y_1 = -y_3} \text{ lin. dip.} \\ y_2 = y_3 \end{cases}$ $\quad \mathrm{Ker} A^T = \mathrm{im} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\mathrm{im} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ perché $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A^T$ $\quad \mathrm{Ker} A : Ay = 0 \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - y_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -y_2 \\ y_2 = -y_3 \\ y_1 = y_3 \end{cases}$ $\quad \mathrm{Ker} A = \mathrm{im} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Noto che $\mathrm{im} A^T \perp \mathrm{Ker} A$ e $\mathrm{im} A \perp \mathrm{Ker} A^T$

$$A^+ = A^T X (X^T A A^T X)^{-1} X^T \quad \text{dove } X \text{ è matrice di base di } \mathrm{im} A : X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= A^T X [(A^T X)^T \cdot (A^T X)]^{-1} X^T$$

COMPITINO: VENERDÌ 14.30 - 16.30 (iscriversi)

ESERCIZI: GIOVEDÌ MATTINA (8.30 - 10.30 AULA 8)

$$A^+ = A^T X\left[(A^T X)^T A^T X\right]^{-1} X^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{*}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & 2/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1-3x_2}{6} \\ \frac{1-3x_2}{2} + 6x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 9x_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2/9 \\ x_2 = -1/9 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{x_2}{2} \\ -\frac{3}{2}x_2 + 6x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ \frac{9}{2}x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1/9 \\ x_2 = 2/9 \end{cases}$$

Teorema diagon.

Dim.

- Sufficienza: supponiamo $\{v_1, \dots, v_n\}$ autovettori lin. indip. associati a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori. $Av_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, \dots, n$. Scritta in forma matriciale diventa

$$A[v_1, \dots, v_n] = [\underset{\lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n}{\lambda_1 v_1}, \dots, \lambda_n v_n] = \underbrace{[v_1, \dots, v_n]}_{T}\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\text{matrice diagonale}} \Rightarrow AT = T\Lambda$$

$$T^{-1}AT = T^{-1}T\Lambda \Rightarrow \Lambda = T^{-1}AT.$$

- Necessità: $\exists\, T$ non singolare tale che $\Lambda = T^{-1}AT$

$$T\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \underbrace{TT^{-1}}_{I}AT \quad \text{definisco } [v_1, \dots, v_n] = T \quad [v_1, \dots, v_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = A[v_1, \dots, v_n]$$

$$[v_1\lambda_1, v_2\lambda_2, \dots, v_n\lambda_n] = [Av_1, \dots, Av_n] \quad \text{cioè } Av_i = \lambda_i v_i \quad i = 1, \dots, n \quad \blacksquare$$

ESERCITAZIONE 2

① $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & -3 \\ -3 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda+1)^2 - 9 = \lambda^2 + 2\lambda - 8$

$\lambda^2+2\lambda-8=0 \qquad \lambda=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{1}= \begin{cases}-4\\ 2\end{cases} \qquad \sigma(A)=\{-4,2\}$.

Gli autovalori sono distinti e reali, quindi $\exists\, T$ non singolare tale che

$$\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=T^{-1}AT$$

BLOCCHETTI ELEMENTARI DI JORDAN

in questo caso.

$$m(\lambda)=(\lambda+4)^1(\lambda-2)^1=\lambda^2+2\lambda-8=p(\lambda)$$

Determino gli autovettori

$Ax=-4x$ (autovalore)
$$\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4x_1\\ -4x_2\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}-x_1+3x_2=-4x_1\\ 3x_1-x_2=-4x_2\end{cases} \qquad \begin{cases}3x_1+3x_2=0\\ 3x_1+3x_2=0\end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è non singolare $\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ come è giusto che sia.

$$v_{-4}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{per } \lambda_1=-4$$

$$Ax=2x \qquad \begin{bmatrix}-1 & 3\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1\\ 2x_2\end{bmatrix} \qquad \begin{cases}-x_1+3x_2=2x_1\\ 3x_1-x_2=2x_2\end{cases} \qquad \begin{cases}-3x_1+3x_2=0\\ 3x_1-3x_2=0\end{cases}$$

$$v_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \quad \text{per } \lambda_2=2$$

$T \triangleq [v_1, v_2]=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ Faccio la verifica $T^{-1}=$

$J=T^{-1}AT=$

② $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ $\quad p(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\det\begin{bmatrix}\lambda-3 & -4\\ 2 & \lambda+1\end{bmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)+8=\lambda^2-2\lambda+5$

$\sigma(A)=\{1\pm 2j\}$ infatti $\lambda^2-2\lambda+5=0 \quad \lambda=\dfrac{1\pm\sqrt{1-5}}{1}=1\pm 2j.$

$m(\lambda)=p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+5$ avendo autovalori di molteplicità 1.

$T^{-1}AT=J=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ da verificare

$\underbrace{A(x+jy)}_{\text{numero complesso ("x")}}=\underbrace{(1+2j)}_{\text{autovalore}}(x+jy) \Leftrightarrow \left(A-(1+2j)I\right)(x+jy)=0+j0$ come da teoria

$A(x+jy)=x-2y+2jx+jy \qquad \begin{cases}Ax=x-2y\\ Ay=2x+y\end{cases}$

$\begin{cases}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}\end{cases} \qquad \begin{cases}3x_1+4x_2=x_1-2y_1\\ -2x_1-x_2=x_2-2y_2\\ 3y_1+4y_2=2x_1+y_1\\ -2y_1-y_2=2x_2+y_2\end{cases}$

il rango della matrice dei coeff. deve essere 2 perché trovo uno spazio di dim 2.

$\begin{cases}2x_1+4x_2+2y_1=0\\ -2x_1-2x_2+2y_2=0\\ -2x_1+2y_1+4y_2=0\\ -2x_2-2y_1-2y_2=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1+2x_2+y_1=0\\ x_1+x_2-y_2=0\\ x_1-y_1-2y_2=0\\ x_2+y_1+y_2=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1=-2x_2-y_1\\ -x_2-y_1-y_2=0\\ -\cancel{2}x_2-\cancel{2}y_1-\cancel{2}y_2=0\\ x_2+y_1+y_2=0\end{cases}$ uguali!

$\begin{cases}x_1=-2x_2-y_1\\ x_2+y_1+y_2=0\end{cases}$ Voglio costruire una matrice di base per la parte reale e una per la parte complessa.

$\begin{cases}x_2=0\\ y_1=-1\\ x_1=1\\ y_2=1\end{cases} \qquad \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+j\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=x+jy \qquad T=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

L'autospazio complesso è $\operatorname{im}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}+j\operatorname{im}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

③ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ AUTOVALORI $\quad p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)^2$

$\sigma(A) = \{2, 1, 1\}$

$(\lambda I - A)^{-1} = \dfrac{Agg(\lambda I - A)}{\det(\lambda I - A)}$ costruisco la matrice dei complementi algebrici

$C_{(\lambda I - A)} = \begin{bmatrix} (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 1-\lambda & (\lambda-2)(\lambda-1) & 0 \\ 1-\lambda & 0 & (\lambda-2)(\lambda-1) \end{bmatrix}$ = trasposta dell'aggiunta

M.C.D. $= (\lambda - 1)$

$(\lambda I - A)^{-1} = \dfrac{C_{(\lambda I - A)}^T}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}$ $\qquad m(\lambda) = \dfrac{(\lambda-2)(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)} = (\lambda-2)(\lambda-1)$

Il polinomio minimo lo si poteva ottenere dal denominatore semplificato di $(\lambda I - A)^{-1}$

$$\Downarrow \quad \dfrac{\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}^T}{(\lambda-2)(\lambda-1)}$$

La matrice di Jordan sarà $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T^{-1} A T$

$Ax = 2x \quad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2x_1 \\ x_2 = 2x_2 \\ x_3 = 2x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Ax = 1 \cdot x \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Prendo $x_2 = 0$ e $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

poi

prendo $x_2 = 1$ e $x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Matrice di base dell'autospazio associato

$$T = [D_1 D_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

TUTORATO

$A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ $\quad \sigma(A) = \{\sigma \pm j\omega, \rho_1\}$ $\quad$ con $\rho_1 \in \mathbb{R}$

avendo gli autovalori molteplicità 1.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \sigma - j\omega)(\lambda - \sigma + j\omega)(\lambda - \rho_1) = (\lambda - \rho_1)\left[(\lambda - \sigma)^2 + \omega^2\right] = m(\lambda)$$

La forma di Jordan complessa è

$$J_c = \left[\begin{array}{cc|c} \sigma + j\omega & 0 & 0 \\ 0 & \sigma - j\omega & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho_1 \end{array}\right]$$

La forma di Jordan reale è

$$J_R = \left[\begin{array}{cc|c} \sigma & \omega & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho_1 \end{array}\right]$$

Una varietà lineare $\mathcal{M}$ è una $\mathcal{M} = \{v_0\} + \mathcal{Y}$

$\mathcal{M}$ è un sottospazio essendo

$\alpha \mathcal{M} = \alpha[\{v_0\} + \mathcal{Y}] = \{\alpha v_0\} + \mathcal{Y}$

$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \{v_1 + v_2\} + \mathcal{Y}$

Luca Ciobani $\quad$ 328/2125174 $\quad$ luca@ciobani.com

Dispense al centro fotocopie.

CLASSIFICAZIONE SISTEMI

- DINAMICI
- ISTANTANEI

- STAZIONARI → A, B, C, D non dipendono da t ⇐
- NON STAZIONARI

- LINEARI → più facili e prevedibili ⇐
- NON LINEARI

- CAUSALI
- NON CAUSALI

- PARAMETRI CONCENTRATI
- PARAMETRI DISTRIBUITI

- SISO → singolo ingresso singola uscita
- MIMO → tanti ingressi tante uscite ⇐

Noi tratteremo sistemi a stati infiniti che possono essere a dimensione finita (più importanti) o a dimensione infinita, a seconda della dimensione del vettore di stato.

SISTEMI A TEMPO CONTINUO

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{A(t)}_{\text{MATRICE DI SISTEMA}} x(t) + \underbrace{B(t)}_{\text{MATRICE DI DISTRIBUZIONE DEGLI INGRESSI}} u(t) , \quad x(t_0) = x_0 & \text{equazione differenziale} \\ y(t) = \underbrace{C(t)}_{\text{MATRICE DI DISTRIBUZIONE DELLE USCITE}} x(t) + \underbrace{D(t)}_{\text{MATRICE DEL LEGAME ALGEBRICO INGRESSO-USCITA}} u(t) & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Il generico sistema è caratterizzato da un vettore di stato, un certo numero di ingressi e di uscite.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

con f e g che possono essere funzioni qualunque.

Se f e g sono lineari rispetto a x e ad u e se l'insieme degli ingressi e degli stati formano uno spazio vettoriale, il sistema è lineare.

Per essere lineare devo quindi avere una combinazione lineare di stati e ingressi.

In A, B, C, D c'è la descrizione fisica del sistema.

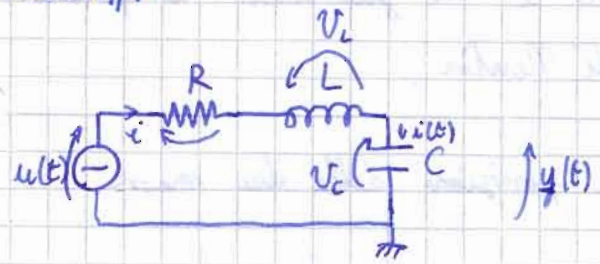
SISTEMI TEMPO DISCRETI $\quad \Sigma_d : \begin{cases} x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k) \quad , x(0) = x_0 . \\ y(k) = C(k)\,x(k) + D(k)\,u(k) \end{cases}$ equazione alle differenze

k è il tempo discreto, ho tanti campioni. Il sistema è lineare non stazionario

$$A(k) = \begin{pmatrix} 2 & t \\ t+1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sistema non stazionario}$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sistema stazionario.}$$

Esempio



$$\dot{V}_c(t) = \frac{i(t)}{C} \Rightarrow \ddot{V}_c(t) = \frac{\dot{i}(t)}{C} = \frac{V_L(t)}{LC}$$

$$\dot{i}(t) = \frac{V_L(t)}{L}$$

$$V_L(t) = u(t) - R\,i(t) - V_c(t) \Rightarrow V_L(t) = u(t) - RC\,\dot{V}_c(t) - V_c(t)$$

$LC\,\ddot{V}_c(t) = u(t) - RC\,\dot{V}_c(t) - V_c(t)$ è un sistema lineare

Ho trovato un'equazione differenziale scalare dove compare la derivata seconda. Posso <u>sempre</u> passare nella forma che abbiamo visto sopra.

Prendo $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} V_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix}$ (vettore). $\quad V_L(t) = u(t) - R\,i(t) - V_c(t)$

$$\begin{cases} \dot{i}(t) = \dfrac{V_L(t)}{L} = \dfrac{u(t)}{L} - \dfrac{R\,i(t)}{L} - \dfrac{V_c(t)}{L} \\ \dot{V}_c(t) = \dfrac{i(t)}{C} \\ y(t) = V_c(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{V}_c(t) \\ \dot{i}(t) \end{bmatrix} = A(t) \cdot \begin{bmatrix} V_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + B(t) \begin{bmatrix} u(t) \end{bmatrix}$$

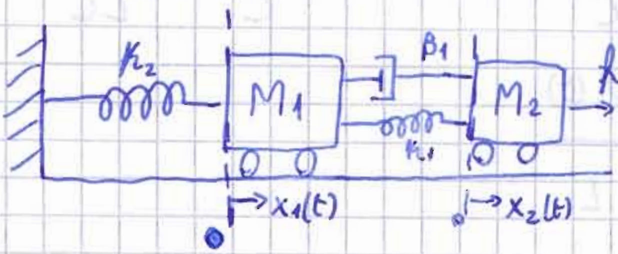
$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Ogni sistema posso scriverlo
- con un'equazione differenziale scalare con derivate n-esime
- con un sistema di due equazioni differenziali vettoriali.

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

MODELLISTICA TRASLAZIONALE MECCANICA

In un sistema <u>meccanico</u> si isolano le masse e si guardano le forze agenti sulla massa. Poi applico la legge di Newton.



x_1, x_2 posizioni delle due masse

$$\begin{cases} M_1 \cdot \ddot{x}_1(t) = -k_2\, x_1(t) + \beta_1\left(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\right) + k_1\left(x_2(t) - x_1(t)\right) \\ M_2 \cdot \ddot{x}_2(t) = f(t) + k_1\left(x_1(t) - x_2(t)\right) + \beta_1\left(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right) \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

massa per accelerazione

← sono scalari ⇓ voglio vettoriali

NOTAZIONE
$x(t)$ = scalare
$\underline{x}(t)$ = vettore

<u>Uso come vettori di stato le posizioni delle masse e le velocità delle masse.</u>

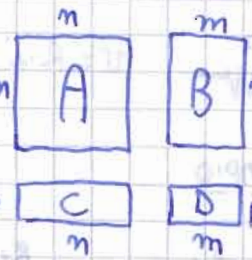
Definisco quindi $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}$ voglio trovare A e B tali che

$\underline{\dot{x}}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-K_2-K_2}{M_1} & \frac{K_1}{M_1} & -\frac{\beta_1}{M_1} & \frac{\beta_1}{M_1} \\ \frac{K_1}{M_2} & -\frac{K_1}{M_2} & \frac{\beta_1}{M_2} & -\frac{\beta_1}{M_2} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\underline{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix}}_{B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} f(t) \end{bmatrix}}_{\underline{u}(t)} \\ \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\underline{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} f(t) \end{bmatrix}}_{\underline{u}(t)} \end{cases}$$

Il sistema è lineare e stazionario

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $\quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ $\quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$



$\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vettore di stato ha n elementi

$\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ vettore degli ingressi ha m elementi

$\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ vettore delle uscite ha p elementi

MODELLISTICA ROTAZIONALE MECCANICA

La posizione in questo caso sarà $\theta(t)$ e la velocità sarà $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$. Invece di considerare la massa considero il momento di inerzia J.

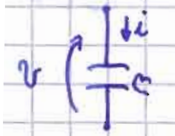
Al posto della molla avrò un aggeggio torsionale e al posto dell'ammortizzatore avrò qualcosa di simile. Al posto delle forze avrò coppie.

$$J_1 \cdot \ddot{\theta}_1(t) = c(t) - k_T(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - \beta_{ATT}\, \dot{\theta}_1(t)$$

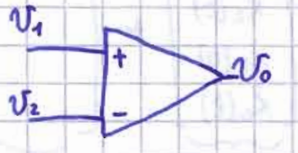
$$J_2\, \ddot{\theta}_2(t) = -k_T(\theta_2(t) - \theta_1(t))$$

Una forza che fino ad ora abbiamo trascurato è l'ATTRITO. Noi considereremo attriti solo di tipo viscoso. L'attrito è sempre contrario al movimento ed è proporzionale (β_{ar}) alla velocità.

MODELLISTICA ELETTRONICA



$$\dot{v}(t) = \frac{i(t)}{C}$$

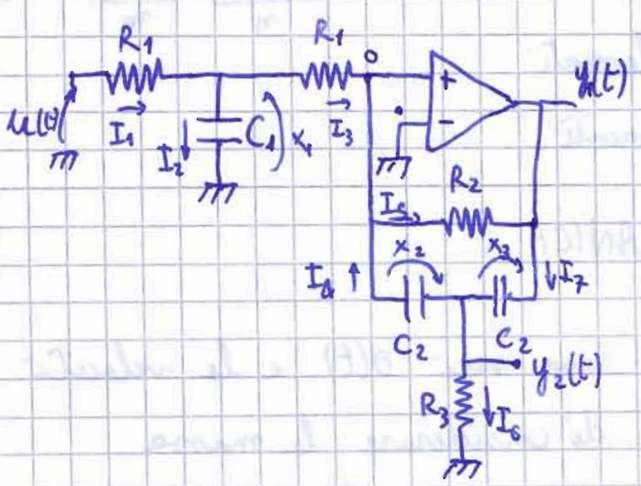


Vale sempre il cortocircuito virtuale: $V_1 = V_2$; $R_{in} = \infty$; $R_{OUT} = 0$

$$\dot{i}(t) = \frac{v(t)}{L}$$

$$v = R \cdot i$$

Esempio



Metto giù il verso delle tensioni e correnti. Avrò come vettore di stato tensioni ai capi dei condensatori e correnti delle induttanze.

$n = 3$ stato

$m = 1$ ingresso $\quad \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

$p = 2$ uscite

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{I_2(t)}{C_1} \\[2ex] \dot{x}_2(t) = \dfrac{I_4(t)}{C_2} \\[2ex] \dot{x}_3(t) = \dfrac{I_7(t)}{C_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = x_2(t) + x_3(t) \quad \text{essendo } V^+ = 0\,V \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

Devo ricavare I_2, I_4, I_7 in funzione di x e u.

$$\begin{cases} I_2(t) = I_1(t) - I_3(t) = \dfrac{u(t) - 2x_1(t)}{R_1} \\ I_1(t) = \dfrac{u(t) - x_1(t)}{R_1} \\ I_3(t) = \dfrac{x_1(t)}{R_1} \\ I_4(t) = I_5(t) - I_3(t) = -\dfrac{x_2(t) + x_3(t)}{R_2} - \dfrac{x_1(t)}{R_1} \\ I_6(t) = \dfrac{x_2(t)}{R_3} \\ I_5(t) = -\dfrac{x_2(t) + x_3(t)}{R_2} \\ I_7(t) = I_4(t) + I_6(t) = -\dfrac{x_2(t) + x_3(t)}{R_2} - \dfrac{x_1(t)}{R_1} + \dfrac{x_2(t)}{R_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dfrac{u(t) - 2x_1(t)}{R_1 C_1} \\ \dot{x}_2(t) = -\left(\dfrac{x_2(t) + x_3(t)}{R_2 C_2} + \dfrac{x_1(t)}{R_1 C_2} \right) \\ \dot{x}_3(t) = -\left(\dfrac{x_2(t) + x_3(t)}{R_2 C_2} + \dfrac{x_1(t)}{R_1 C_2} - \dfrac{x_2(t)}{R_3 C_2} \right) \\ y_1(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{2}{R_1C_1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_1C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \\ -\frac{1}{R_1C_2} & \frac{1}{R_3C_2} - \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underline{u}(t) \\
y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} \cdot \underline{u}(t) .
\end{cases}
$$

Esercizio (Modello di Richardson)

$\underline{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ potenziale bellico 1ª nazione / potenziale bellico 2ª nazione

$\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2$ coefficienti di costo

$\dot{x}_1(t)$ variazione nell'unità di tempo del potenziale bellico.

$$\dot{x}_1(t) = -\beta_1 x_1(t) + \alpha_1 \underbrace{x_2(t)}_{\text{nazione rivale}} + \underbrace{u_1(t)}_{\text{clima aggressivo}}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\beta_2 x_2(t) + \alpha_2 x_1(t) + u_2(t)$$

$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ potenziale bellico del mondo

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \qquad \beta_1 = \beta_2 = 2$ Disegno l'evoluzione dello stato con ingressi nulli quando lo stato iniziale è $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad P_A(\lambda) = (\lambda+2)^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{1} = -2 \pm 1 = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda+1) = P_A(\lambda) \qquad gr\ m_A(\lambda) = 2$$

$$x(t) = \phi(t,0)x_0 = e^{At}x_0. \qquad y(t) = C e^{At} x_0 \qquad e^{At} = \sum_{i=0}^{1} \gamma_i A^i = \gamma_0 I + \gamma_1 A$$

$$\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\gamma_0 = \frac{3e^{-t} - e^{-3t}}{2} \qquad \gamma_1 = \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\gamma_1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & -2\gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 - 2\gamma_1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 - 2\gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_0 - 2\gamma_1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 - 2\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100(\gamma_0 - 2\gamma_1) \\ 100\gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \left[\frac{3e^{-t} - e^{-3t}}{2} - \frac{2e^{-t} - 2e^{-3t}}{2} \right] \\ 100 \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 50(e^{-t} + e^{-3t}) \\ 50(e^{-t} - e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50(e^{-t} + e^{-3t}) \\ 50(e^{-t} - e^{-3t}) \end{bmatrix} = 100 e^{-t}$$

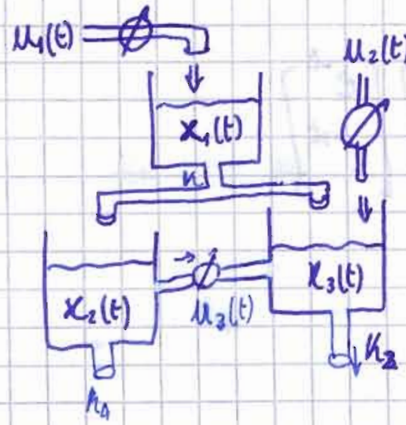
SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE → poli a parte reale negativa

SISTEMA SEMPLICEMENTE STABILE → polo in 0 di ordine 1

SISTEMA INSTABILE → poli a parte reale positiva, polo in 0 di ordine > 1.

$m(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+3)^2\lambda^2$ modi: $e^{-2t}, e^{-3t}, te^{-3t}, 1, t$ diverge instabile

Esercizio



$$\frac{dV(t)}{dt} = \Sigma \text{ flussi in ingresso} - \Sigma \text{ flussi in uscita}$$

$$V(t) = \overset{\text{area}}{A}\, h(t) = h(t)$$

Variabili di stato: $x_i(t)$ = volume cilindro i

Supponiamo che il flusso che esce sia proporzionale all'altezza del cilindr

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) - k_1 x_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k_1}{2} x_1(t) - k_4 x_2(t) - u_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{k_1}{2} x_1(t) + u_3(t) - k_2 x_3(t) + u_2(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{2} & -k_4 & 0 \\ \frac{k_1}{2} & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $k_1, k_2, k_4 \geq 0$, gli autovalori della matrice A sono negativi o nulli $(-k_1, -k_2, -k_4)$. I modi naturali del sistema saranno:
$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}$ cioè $e^{-k_1 t}, e^{-k_2 t}, e^{-k_4 t}$.
Il sistema è pertanto asintoticamente stabile, a patto che i k_i non siano tutti nulli. Se uno è nullo il sistema è semplicemente stabile, se almeno 2 sono nulli è instabile.

Dimostrazione II.as $\phi(k,k_0)$ è soluzione di $x(k+1) = A(k)x(k)$

$$x(k+1) = \phi(k+1,k_0)\,x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k} \phi(k+1,j+1)\,B(j)U(j) =$$

$$= \underbrace{A(k)\,\phi(k,k_0)}\,x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \underbrace{A(k)\,\phi(k,j+1)}\,B(j)U(j) + \underbrace{\phi(k+1,k+1)}_{I}\,B(k)U(k) =$$

$$= A(k)\left[\phi(k,k_0)\,x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1}\phi(k,j+1)B(j)U(j)\right] + B(k)U(k) = A(k)x(k) + B(k)U(k).$$

Esercizio Tempo Discreto

Piano di ammortamento di un capitale finanziario.

$C \rightarrow$ capitale
$N \rightarrow$ numero rate
$P \rightarrow$ importo della rata ?
$R \rightarrow$ tasso di interesse costante tra k e $k+1$

Vediamolo come sistema dinamico a tempo discreto. Definisco:
$x(k)$ capitale che ancora devo restituire alla banca dopo k periodi.
$x(k+1) = x(k) + Rx(k) - p(k) = \underbrace{(1+R)}_{A \text{ scalare}}\underbrace{x(k)}_{\text{stato}}\underbrace{-}_{B}\underbrace{p(k)}_{u(k)}$ sistema tempo discreto scalare

Applico la formula:

NON STAZIONARIO $\quad x(k) = \phi(k,k_0)\,x(k_0) + \sum_{j=0}^{k-1}\phi(k,j+1)\,B(j)\,U(j)$

STAZIONARIO $\quad x(k) = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B\,U(j)$ $\leftarrow$

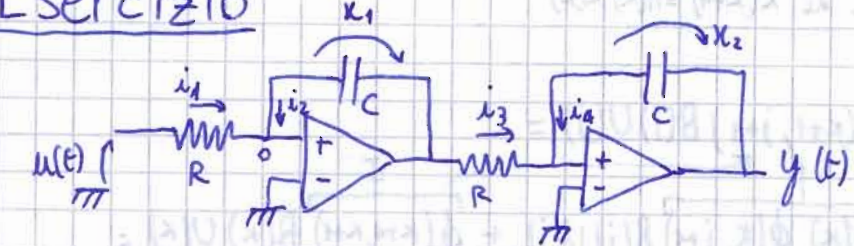
In questo caso stazionario (A e B costanti):

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(j) = (1+R)^k x(0) - \sum_{j=0}^{k-1} (1+R)^{k-j-1} P(j).$$

Suppongo le rate uguali: $P(j) = P$.

$$x(N) = 0 \Rightarrow (1+R)^N \cdot C - P \sum_{j=0}^{N-1} (1+R)^{N-j-1} = 0 \Rightarrow P = \frac{(1+R)^N \cdot C}{\sum_{j=0}^{N-1} (1+R)^{N-j-1}}.$$

Esercizio



1 uscita $p = 1$

1 ingresso $m = 1$

$R = 1\ \Omega$

$C = 1\ F$

$u(t) = \delta(t)$

1. Modello di stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \text{tensioni}$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C} \cdot i_2(t)$$ esprimo i_2 e i_4 in funzione dello stato e dell'ingresso

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{C} i_4(t)$$

$i_2 = -i_1$ essendo l'operazionale ideale

$$i_1 = \frac{u(t)}{R}$$

$$i_4 = -i_3$$

$$i_3 = \frac{x_1(t)}{R}$$

$y(t) = x_2(t)$

Riassumendo :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{1}{RC}\, u(t) & \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{1}{RC}\, x_1(t) & \\ y(t) = x_2(t) & y(t) = C x(t) + D u(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{RC} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0.$$

2. Vediamo cosa accade all'uscita quando $\delta(t)$ in ingresso.

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + D u(t)$$

Devo trovare e^{At}.

$P_A(\lambda) = \lambda^2 \qquad \lambda_1 = 0$ di molteplicità $\overset{\text{instabile}}{2} \qquad (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ MCD tra i minori di ordine $n-1$: $\lambda, \underset{\text{MCD}}{1}, \emptyset$

$$m_A(\lambda) = \frac{P_A(\lambda)}{b_A(\lambda)} = \frac{\lambda^2}{1} = \lambda^2 \text{ grado } l = 2 \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{l-1} \gamma_i A^i = \gamma_0 + \gamma_1 A$$

$$\begin{pmatrix} e^{0t} \\ t e^{0t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \gamma_0 = 1 \\ \gamma_1 = t \end{matrix} \qquad e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(t-\tau) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{-t\,x_1(0) + x_2(0)}_{\text{EVOLUZIONE LIBERA}} + \int_0^t (t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$ *suppongo* $x_1(0) = x_2(0) = 0$ *e* $u(t) = \delta(t)$

$y(t) = t$ (Volt)

Esercizio Indiani

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix}$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix}$$

$x_1(k+1) = x_1(k)$ numero donne sum

$x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k)$

$x_3(k+1) = x_2(k) + x_3(k)$

$$x_4(k+1) = x_3(k) + \underbrace{[x_4(k) - x_1(k) - x_2(k) - x_3(k)]}_{\text{consumone non sposati}} = x_4(k) - x_1(k) - x_2(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x(k+1) = A\,x(k)$ non ho ingressi

$y(k) = x(k)$

$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^4 \qquad m_A(\lambda) = \ldots = (\lambda - 1)^3$

instabile

$x(k) = A^k x(0)$ calcolo A^k con il polinomio interpolante

$$A^k = \sum_{i=0}^{2} \gamma_i A^i = \gamma_0 I + \gamma_1 A + \gamma_2 A^2$$

$$\begin{bmatrix} e^t \\ te^t \\ t^2 e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Stati di equilibrio → per il sistema a tempo continuo sono quegli stati tali che $x_e = \varphi(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ $\forall t$, ovvero $\dot{x}(t) = 0$.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \text{ingresso nullo} = Ax(t) = 0.$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} A = \bar{X}_e$ stati di equilibrio.

Per il sistema a tempo discreto, occorre che $x(k+1) = x(k)$.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ingresso} \\ \text{nullo}}}{=} Ax(k) \Longrightarrow \operatorname{Ker}(A - I) = x_e \quad \text{perché} \quad Ax_e = x_e$$

$$\operatorname{Ker}(A-I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ho un sistema completamente raggiungibile e controllabile: $\operatorname{im} W_r = \operatorname{im} W_c = \mathbb{R}^n$

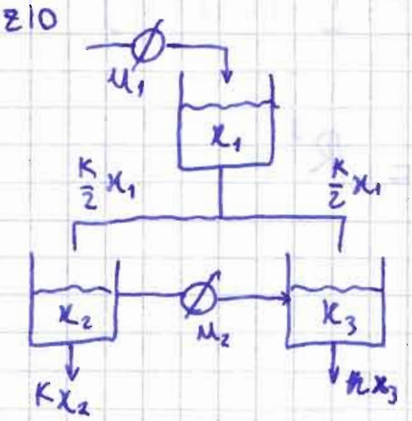
Parto da x_0 a t_0 e voglio arrivare a x_1, t_1.

$$\tilde{u}(t) = B^T(t)\, \phi^T(t_1, t)\, W_r^{-1}(t_0, t_1)\left[x_1 - \phi(t_1, t_0)\, x_0\right]$$

$$x_1 = \phi(t_1, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau)\, B(\tau)\, \tilde{u}(\tau)\, d\tau = \phi(t_1, t_0)\, x_0 + \underbrace{\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau)\, \phi^T(t_1, \tau)}_{W_r(t_0, t_1)} \cdot W_r^{-1}(t_0, t_1)}_{1}$$

$$\left[x_1 - \phi(t_1, t_0)\, x_0\right] d\tau = \cancel{\phi(t_1, t_0)}\, x_0 + x_1 - \cancel{\phi(t_1, t_0)\, x_0} = x_1 .$$

Esercizio



Modello

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}_1(t) = u_1(t) - Kx_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{K}{2}x_1(t) - Kx_2(t) - u_2(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{K}{2}x_1(t) + u_2(t) - Kx_3(t)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$
$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -K & 0 & 0 \\ \frac{K}{2} & -K & 0 \\ \frac{K}{2} & 0 & -K \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Punti di equilibrio per ingressi nulli.

$$\dot{X}_e(t) = 0 \qquad A x(t) + B \cancel{u(t)}^{0} = 0 \qquad A x(t) = 0 \qquad \ker A = \{0\}. \qquad x_e = 0$$

Studio stabilità

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda+K & 0 & 0 \\ -\frac{K}{2} & \lambda+K & 0 \\ -\frac{K}{2} & 0 & \lambda+K \end{bmatrix} = (\lambda+K)^3 \qquad \lambda = -K \text{ molteplicità } 3.$$

Se $K>0$, asintoticamente stabile

Se $K=0$, guardo la molteplicità del polinomio minimo. Se $K=0$, la matrice diventa una 3×3 nulla di Jordan con blocchetti di Jordan di dimensione $1 \Rightarrow m(\lambda) = \lambda \Rightarrow$ semplicemente stabile.

Se $K>0$, $m(\lambda) = \dfrac{p(\lambda)}{b(\lambda)} = \dfrac{(\lambda+K)^3}{\underbrace{\lambda+K}_{\text{MCD minori}}} = (\lambda+K)^2$ modi: e^{-Kt}, $t e^{-Kt}$

Spazio di raggiungibilità dall'origine

Determino la matrice di raggiungibilità $R = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B]$

$$R = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & -K & 0 & K^2 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{K}{2} & K & -K^2 & -K^2 \\ 0 & 1 & \frac{K}{2} & -K & -K^2 & K^2 \end{array}\right] \qquad \operatorname{im} R = R^+_1(0) = \mathbb{R}^3$$

$\uparrow$ $\uparrow$ lin. indip. $\qquad \uparrow AB \qquad A(AB) = A^2B$

Il sistema è completamente raggiungibile.

Elimino u_2 e ricalcolo la raggiungibilità

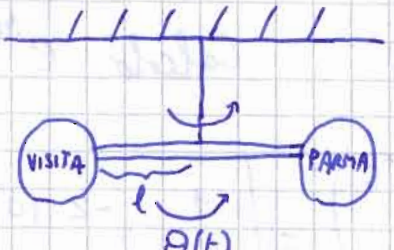
$$A=\begin{bmatrix} -k & 0 & 0 \\ \frac{k}{2} & -k & 0 \\ \frac{k}{2} & 0 & -k \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R=\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & -k & k^2 \\ 0 & \frac{k}{2} & -k^2 \\ 0 & \frac{k}{2} & -k^2 \end{array}\right] \qquad \operatorname{im}R = R^+ = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema non è più completamente raggiungibile.
Infatti non potrò mai trovare uno stato in cui x_2 è più o meno pieno di x_3.

Esercizio autovalori complessi

Dispositivo pubblicitario



$m = 1\ Kg$

$l = 0{,}5\ m$

$k_T = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\ \frac{Nm}{rad}$ $\qquad \Sigma(A,B,C,D)$?

$\beta = 2 \cdot 10^{-4}\ \frac{Nms}{rad}$ $\qquad \measuredangle 10°$?

10 giri iniziali $\qquad J = 0{,}5\ Kg \cdot m^2$

$\omega(t) = \dot\theta(t)$ $\qquad \beta$ attrito viscoso

$\alpha(t) = \ddot\theta(t)$ $\qquad k_T$ molla torsionale

Lo vedo come un oggetto meccanico

$$J \cdot \ddot\theta(t) = -k_T \cdot \theta(t) - \beta \cdot \dot\theta(t)$$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot\theta(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = -\frac{k_T}{J} x_1(t) - \frac{\beta}{J} x_2(t) \\ y(t) = \theta(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K_T}{J} & -\frac{\beta}{J} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9\cdot 10^{-4} & -4\cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \qquad B = \emptyset$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 9\cdot 10^{-4} & \lambda + 4\cdot 10^{-4} \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\cdot 10^{-4}\lambda + 9\cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4\cdot 10^{-4} \pm \sqrt{\underbrace{\cancel{16\cdot 10^{-8}}}_{\text{TRASCURO}} - 36\cdot 10^{-4}}}{2} = -2\cdot 10^{-4} \pm j\,3\cdot 10^{-2}$$

Il sistema è asintoticamente stabile.

Solo evoluzione libera. Dopo quanto tempo inizia a oscillare per $\pm 10°$?

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \qquad \text{Calcolo } e^{At}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-2\cdot 10^{-4}t + j3\cdot 10^{-2}t} \\ e^{-2\cdot 10^{-4}t - j3\cdot 10^{-2}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\cdot 10^{-4} + j3\cdot 10^{-2} \\ 1 & -2\cdot 10^{-4} - j3\cdot 10^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(\cancel{-2\cdot 10^{-4}} - j3\cdot 10^{-2} + \cancel{2\cdot 10^{-4}} - j3\cdot 10^{-2})} \begin{pmatrix} -2\cdot 10^{-4} - j3\cdot 10^{-2} & 2\cdot 10^{-4} - j3\cdot 10^{-2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2\cdot 10^{-4}t + j3\cdot 10^{-2}t} \\ e^{-2\cdot 10^{-4}t - j3\cdot 10^{-2}t} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-6j\cdot 10^{-2}} \begin{bmatrix} (-2\cdot 10^{-4} - j3\cdot 10^{-2})\,e^{-2\cdot 10^{-4}t + j3\cdot 10^{-2}t} + (2\cdot 10^{-4} - j3\cdot 10^{-2})\,e^{-2\cdot 10^{-4}t - j3\cdot 10^{-2}t} \\ -e^{-2\cdot 10^{-4}t + j3\cdot 10^{-2}t} + e^{-2\cdot 10^{-4}t - j3\cdot 10^{-2}t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \gamma_0 I + \gamma_1 A = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 \\ -9\cdot 10^{-4}\gamma_1 & -4\cdot 10^{-4}\gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ * & * \end{bmatrix}$$

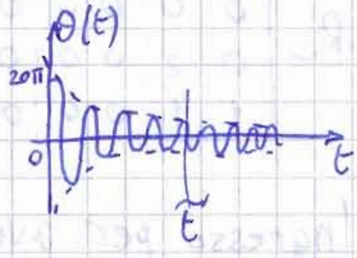
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overset{\text{10 giri}}{20\pi} \\ \underset{\text{velocità nulla alla fine}}{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20\pi \\ 0 \end{bmatrix} = 20\pi \cdot \gamma_0 .$$

$$\gamma_0 = \frac{e^{-2\cdot 10^{-4}t}}{+6\cdot 10^{-2} j} \left[+2\cdot 10^{-4} e^{j3\cdot 10^{-2}t} + j3\cdot 10^{-2} e^{j3\cdot 10^{-2}t} - 2\cdot 10^{-4} e^{-j3\cdot 10^{-2}t} + j3\cdot 10^{-2} e^{-j3\cdot 10^{-2}t} \right]$$

$$= \frac{e^{-2\cdot 10^{-4}t}}{6\cdot \cancel{10^{-2}} \cancel{j}} \left[4\cdot 10^{\cancel{-4}\,-2} \cdot \cancel{j} \sin(3\cdot 10^{-2}t) + \cancel{j} 6 \cdot \cancel{10^{-2}} \cos(3\cdot 10^{-2}t) \right]$$

$$= e^{-2\cdot 10^{-4}t} \left[\frac{2}{3} \cdot 10^{-2} \sin(3\cdot 10^{-2}t) + \cos(3\cdot 10^{-2}t) \right]$$

$$y(t) = 20\pi\, e^{-2\cdot 10^{-4}t} \left[\cos(3\cdot 10^{-2}t) + \frac{2\cdot 10^{-2}}{3} \sin(3\cdot 10^{-2}t) \right]$$



$$\overset{10}{\cancel{20\pi}}\, e^{-2\cdot 10^{-4}t} = \frac{\cancel{2\pi}}{36} \qquad \frac{1}{360} = e^{-2\cdot 10^{-4}t}$$

$$-2\cdot 10^{-4}t = \ln \frac{1}{360} \qquad 2\cdot 10^{-4}t = \ln 360 \qquad t = \frac{\ln 360}{2\cdot 10^{-4}} = 29430 \text{ s}$$

8h 10m 30s.

Esercizio

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda+2) \qquad m(\lambda) = \frac{P_A(\lambda)}{\quad} = \lambda(\lambda+2)$$

$b(\lambda) \to$ MCD monico dei minori di $n-1$ della matrice $\lambda I - A$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

DIVISORI

$\lambda(\lambda+2),\ \lambda,\ \lambda^2 \rightarrow b(\lambda)=\lambda$

Il sistema è semplicemente stabile (modi: $1,\ e^{-2t}$).

Stati di equilibrio ingressi nulli

$$A\bar{x}=0 \rightarrow \ker A: \begin{cases} -2x_1=0 \\ x_1=0 \end{cases} \rightarrow \ker A = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Raggiungibilità del sistema

$$\mathcal{R}^+(0) = \operatorname{im} R \quad \text{Calcolo } R = [B, AB, A^{\overset{n=3}{2}}B]$$

$$R = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \operatorname{im} R = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{R}^+(0) = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ingresso per avere $x(T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ con $T=15$

$$u(\tau) = B^T \phi^T(t_1,\tau)\eta \underset{\text{staz.}}{=} B^T e^{A^T(T-\tau)}\eta \quad \text{con } W_R(t_0,t_1)\eta = x_1$$

$e^{At} = \gamma_0 I + \gamma_1 A$ perché grado polinomio minimo pari a 2.

$$\begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \gamma_0 - 2\gamma_1 = e^{-2t} \\ \gamma_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_0 = 1 \\ \gamma_1 = \dfrac{1-e^{-2t}}{2} \end{cases}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1-e^{-2t}}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{1-e^{-2t}}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo il gramiano di raggiungibilità:

$$W_r(0,T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B B^T e^{A^T(T-\tau)} d\tau$$

Calcolo a parte $e^{A(T-\tau)} \cdot B$

$$W_r(0,T) = \int_0^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \int_0^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ sempre simmetrica

$$W_r(0,T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4T & 2T \\ 0 & 2T & 2T \end{bmatrix}$$

Trovo η

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4T & 2T \\ 0 & 2T & 2T \end{bmatrix} \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 4T\eta_2 + 2T\eta_3 \\ 2T\eta_2 + 2T\eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \cancel{4}^{2}T\eta_2 + \cancel{2}T\eta_3 = \cancel{2} \\ \cancel{2}T\eta_2 + \cancel{2}T\eta_3 = \cancel{2}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ \eta_2 = 0 \\ \eta_3 = \frac{1}{T} \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \\ \frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

$$W_o(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi^T(\tau,t_0)\, C^T(\tau)\, C(\tau)\, \phi(\tau,t_0)\, d\tau$$

$$W_{rc}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi^T(\tau,t_1)\, C^T(\tau), C(\tau)\, \phi(\tau,t_1)\, d\tau$$

$$Q^-(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot))$$

$$Q^+(t_0,t_1,u(\cdot),y(\cdot)$$

$Q^-(t_0, t_1, 0, 0)$ sottospazio vettoriale, è sottospazio di inosservabilità

$Q^+(t_0, t_1, 0, 0)$

Teorema

$$Q^-(t_0, t_1, 0, 0) = \mathrm{Ker}\, W_o(t_0, t_1)$$

$$Q^-(t_0, t_1, 0, 0) = \left\{ x_0 : \underset{0}{y(t)} = C(t)\,\phi(t, T_0)\,x_0 + C(t)\int_{t_0}^{t_1} \phi(t, t_0) B(\tau) \underset{0}{u(\tau)}\, d\tau + D(t)\underset{0}{u(t)} \right\}$$

$$0 = \underbrace{C(t)\,\phi(t, t_0)\,x_0}_{W_o(t_0, t_1)}$$

Teorema

$$Q^+(t_0, t_1, 0, 0) = \mathrm{Ker}\, W_{RC}(t_0, t_1)$$

$$Q^+(t_0, t_1, 0, 0) = \left\{ x_1 : x_1 = \phi(t_1, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau \;,\; x_0 \in Q^-(t_0, t_1, 0, 0) \right\} =$$

$= \left\{ x_1 : x_1 = \phi(t_1, t_0) x_0 ,\; x_0 \in Q^-(t_0, t_1, 0, 0) \right\}$ ma $x_0 \in Q^-(t_0, t_1, 0, 0) \Rightarrow x_0$ tale che $0 = C(t)\phi(t, t_0)$ $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$= \left\{ x_1 : x_1 = \phi(t_1, t_0) x_0 ,\; 0 = C(t)\,\phi(t, t_0)\, x_0 \;\; \forall t \in [t_0, t_1] \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 : C(t)\,\phi(t, t_1)\, x_1 = C(t)\,\phi(t, t_1)\,\phi(t_1, t_0)\, x_0 , \ldots \right\} =$$

$$= \left\{ x_1 : C(t)\,\phi(t, t_1)\, x_1 = C(t)\,\phi(t, t_0)\, x_0 = 0 \right\} = \left\{ x_1 : 0 = C(t)\,\phi(t, t_1)\, x_1 \right\} \Leftrightarrow x_1 \in \mathrm{Ker}\, W_{RC}(t_0, t_1)$$

Esercizio:

Esercizio:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}u(t)$$

ottengo sempre $\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\end{smallmatrix}$

$$R=\left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, A^3B\right]=\left[\begin{array}{cc|cc|cc|c}0&0&0&0&0&0&\\0&1&0&0&0&0&\\0&0&0&1&0&0&\cdots\\1&0&1&0&1&0&\end{array}\right]$$

$$\mathcal{R}^+=\operatorname{im}R=\operatorname{im}\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad n_r=3\qquad n=4\qquad \text{sistema non completamente raggiungibile}$$

Trovo la forma standard di raggiungibilità:

$$T=\left[T_1 \,\vdots\, T_2\right]\Rightarrow \operatorname{im}T_1=\mathcal{R}^+\qquad \operatorname{im}T=\mathbb{R}^4$$

$$T=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad \begin{matrix}A_r=T^{-1}AT & B_r=T^{-1}B\\ C_r=CT & D_r=D\end{matrix}$$

$\qquad\quad T_1 \qquad\quad T_2$

$\dim A_1=n_r\times n_r$

$$T^{-1}\underset{\substack{\uparrow\\\text{in questo caso}}}{=}T^T=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_r=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right]$$

A_1, A_{12}, 0, A_2

$$B_r=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc}0&1\\0&0\\1&0\\\hline 0&0\end{array}\right]$$

B_1, 0

Il sottosistema completamente raggiungibile è $\Sigma(A_1,B_1)$ con $A_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $B_1=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\1&0\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\qquad A_r=\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&1\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right]$$

autovalore (modo) associato alla parte non raggiungibile

Esercizio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Tempo continuo.

Stabilità

$\sigma(A) = \{0, -2, 1, -1, -1, -2\}$ sistema internamente instabile (autovalore $+1$).

Scomposizione di Kalman

Trovo $T = [T_1 \,\vdots\, T_2 \,\vdots\, T_3 \,\vdots\, T_4]$

$im(T_1 T_2) = \mathcal{R}^+ \qquad im(T_2 T_4) = \mathcal{Q}^-$

$im(T_2) = \mathcal{R}^+ \cap \mathcal{Q}^- \qquad im(T) = \mathbb{R}^6$

$$\mathcal{R}^+ = \operatorname{im} R = \operatorname{im} [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, A^3B \,\vdots\, A^4B \,\vdots\, A^5B] =$$

$$= \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow n_R = 3 \quad \mathcal{R}^+ = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dipendente dalle precedenti $\Rightarrow$ STOP

$$\mathcal{Q}^- = \operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{bmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} = \begin{cases} x_5 = 0 \\ x_6 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad n$$

$$\operatorname{im} T_2 = \mathcal{R}^+ \cap \mathcal{Q}^- = \left((\mathcal{R}^+)^\perp \cup (\mathcal{Q}^-)^\perp\right)^\perp \underset{\text{a occhio}}{=} \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

unico in comune

$$(\mathcal{R}^+)^\perp = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \qquad (\mathcal{Q}^-)^\perp = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad (\mathcal{R}^+)^\perp \cup (\mathcal{Q}^-)^\perp = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} T_2 = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

$$T = \left[\, T_1 \,\middle|\, T_2 \,\middle|\, T_3 \,\middle|\, T_4 \,\right] = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c|cc|c} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{array} \end{array}.$$

$$A_K = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&-2&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&1&0&0&0&-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&1&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&-2&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&-2\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c|cc|c} -1&0&0&0&0&0\\ 1&-1&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&-2&0&0\\ 0&0&0&1&-2&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right] \qquad A_{11},\ A_{22},\ A_{33},\ A_{44}$$

$$B_K = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1\\ 0&0\\ 0&0\\ 1&0\\ 0&0\\ 0&0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 1&0\\ 0&0\\ \hline 0&1\\ \hline 0&0\\ 0&0\\ 0&0 \end{array}\right]\begin{array}{l} B_1\\ \\ B_2\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$C_K = CT = \left[\, \underbrace{\begin{array}{cc} 0&1\\ 0&0 \end{array}}_{C_1} \;\begin{array}{c} 0\\0 \end{array}\; \underbrace{\begin{array}{cc} 0&0\\ 0&1 \end{array}}_{C_2} \;\begin{array}{c} 0\\0 \end{array} \,\right]$$

Un sistema esternamente equivalente è:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = C_1(sI-A_{11})^{-1}B_1 + \cancel{D_1}^{\,0} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 1 & s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+1}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Il sistema è esternamente stabile (B.I.B.O).

Nota che l'autovalore +1 è stato spostato nella parte inosservabile e non raggiungibile.

Esercizio A 9/12/2005 (pag 20/25)

$C(t) = \alpha\,\theta(t)$ (vento) $\qquad y(t) = \theta(t)$

$T(t) = \beta\,\phi(t)$ (timone)

$$\begin{cases} J \cdot \ddot{\theta}(t) = \alpha\,\theta(t) - \beta\,\phi(t) \\ \phi(t) = k_1\,\theta(t) \quad \text{controllo} \end{cases} \Rightarrow J\ddot{\theta}(t) = \alpha\,\theta(t) - \beta k_1\,\theta(t)$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix}\theta(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{\alpha-\beta K_1}{J} & 0\end{bmatrix}}_{A} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x(t)$$

Stati di equilibrio:

$$\dot{x} = 0 \rightarrow 0 = A x_e \rightarrow \underline{x_e} = 0$$

Stabilità:

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \frac{\alpha - \beta K_1}{J} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\alpha-\beta K_1}{J}} \qquad K_1 = \begin{cases} 0 < K_1 < \frac{\alpha}{\beta} & \text{instabile} \\ K_1 > \frac{\alpha}{\beta} & \text{sempl. stabile} \\ K_1 = \frac{\alpha}{\beta} & \text{instabile} \end{cases}$$

2) $\phi(t) = k_1\,\theta(t) + k_2\,\dot\theta(t) + v(t)$
↳ ingresso

$$J\ddot\theta(t) = \alpha\,\theta(t) - k_1\,\theta(t) - k_2\,\dot\theta(t) - v(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot\theta(t) \end{bmatrix} \qquad \dot\theta(t) = x_2 \qquad \theta(t) = x_1 \qquad \begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = \dfrac{\alpha}{J}x_1 - \dfrac{k_1}{J}x_1 - \dfrac{k_2}{J}x_2 - \dfrac{1}{J}v \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\alpha - k_1}{J} & -\dfrac{k_2}{J} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{J} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\dfrac{\alpha-k_1}{J} & \lambda + \dfrac{k_2}{J} \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{k_2}{J}\lambda - \frac{\alpha - k_1}{J}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\dfrac{k_2}{J} \pm \sqrt{\left(\dfrac{k_2}{J}\right)^2 + 4\dfrac{\alpha-k_1}{J}}}{2} \Rightarrow$$

- se $\dfrac{\alpha - k_1}{2} << 0$, avrò due soluzioni complesse coniugate → asintoticamente stabile
- se $\alpha = k_1$ è semplicemente stabile $(\lambda = 0, \dots)$
- se $k_1 < \alpha$ è instabile

Esercizio 25/5/07 - MODELLO DI UN SISTEMA DI COMUNICAZIONE RADIO

$x_0(t) = 1 - x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)$

$u(t) = 1 \quad \forall t$

$\alpha\,dt$ probabilità utente arrivi tra t e $t+dt$

$\gamma\,dt$ " " se ne vada " " " "

$$x_1(t+dt) = x_0(t)\cdot \alpha dt + x_2(t)\cdot \gamma dt + x_1(t)\cdot(1-\alpha dt)(1-\gamma dt) = (1-x_1-x_2-x_3)\alpha dt + x_2\gamma dt + x_1 - x_1\alpha d$$
$$- x_1\gamma dt + x_1\alpha\gamma(dt)^2$$

$$x_2(t+dt) = x_1(t)\cdot \alpha dt + x_3(t)\cdot\gamma dt + x_2(t)(1-\alpha dt)(1-\gamma dt)$$

$$x_3(t+dt) = x_2(t)\cdot\alpha dt + x_3(t)(1-\gamma dt)$$

$$dt \to 0 \quad \lim_{dt\to 0} \frac{x(t+dt)-x(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

$$\frac{x_1(t+dt)-x_1(t)}{dt} = (-2\alpha-\gamma)x_1 + (\gamma-\alpha)x_2 + x_1\alpha\gamma dt - \alpha x_3 + \alpha$$

$$dt \to 0 \implies \dot{x}_1(t) = (-2\alpha-\gamma)x_1(t) + (\gamma-\alpha)x_2(t) - \alpha x_3(t) + \alpha$$

$$\frac{x_2(t+dt)-x_2(t)}{dt} = \alpha x_1(t) + (-\alpha-\gamma)x_2(t) + \gamma x_3(t) - \alpha\gamma x_2(t)(dt)^2$$

$$dt \to 0 \implies \dot{x}_2(t) = \alpha x_1(t) + (-\alpha-\gamma)x_2(t) + \gamma x_3(t)$$

$$\frac{x_3(t+dt)-x_3(t)}{dt} = \alpha x_2(t) - \gamma x_3(t)$$

$$dt \to 0 \implies \dot{x}_3(t) = \alpha x_2(t) - \gamma x_3(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2\alpha-\gamma & \gamma-\alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha-\gamma & \gamma \\ 0 & \alpha & -\gamma \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{perché } u(t)=1$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

A2) $\gamma = \alpha$ $\quad A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\alpha$ $\quad \text{Ker } A: \begin{cases} -3x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{1}{3}x_3 - 2x_3 + x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$

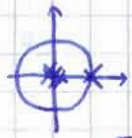
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

B.

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_d = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Il sistema è semplicemente stabile



$$\mathcal{R}^+ = \operatorname{im} R = \operatorname{im} \left[\begin{array}{cc|cc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}\right] = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}^+ = A^n \mathcal{R}^- \rightsquigarrow \mathcal{R}^- = (A^5)^{-1} \mathcal{R}^+ = \left[(A^5)^T (\mathcal{R}^+)^\perp\right]^\perp$$

$$A^{-1} y = (A^T y^\perp)^\perp$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^3 = A^4 = A^5 \qquad (A^5)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathcal{R}^+)^\perp = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Ker} A^T = (\operatorname{im} A)^\perp$

$x_1 = 0$
$x_2 = -x_3$
$x_4 = -x_5$

$$\mathcal{R}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\perp = \mathbb{R}^5 \Rightarrow \mathcal{X} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

perché non fanno parte di $\mathcal{R}^+$ ma fanno parte di $\mathcal{R}^- = \mathbb{R}^5$.

Q^-, Q^+. il tempo discreto $Q^+ = A^n Q^-$.

$$Q^- = \ker Q = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sottospazio di inosservabilità

$x_1 = x_3$, $x_1 = +x_2$ $\rightarrow$ $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$

$$Q^+ = A^5 Q^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kalman.

$$A_K = T^{-1} A T \qquad B_K = T^{-1} B \qquad C_K = CT \qquad D_K = D$$

$$T = [T_1 \; T_2 \; T_3 \; T_4]$$

$$\operatorname{im}(T_1 T_2) = R^+ \qquad \operatorname{im}(T_2) = R^+ \cap Q^- \qquad \operatorname{im}(T_2 T_4) = Q^-$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $\quad x_1 = -x_2 - x_3$

$x_4 = 0$

$x_5 = 0$

$$R^+ \cap Q^- = \left((R^+)^\perp \cup (Q^-)^\perp \right)^\perp \qquad (Q^-)^\perp = \ker \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\operatorname{im} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right]^\perp = \ker \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$1^a + 3^a$ via

$x_2 = x_3$

$x_4 = x_5$

$x_1 = x_3$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1ª meno 3ª

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & \cancel{1}\,0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cancel{0}\,{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{1}\,0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cancel{0}\,{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{1}\,0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cancel{0}\,{-1} & 1 \end{array}\right] \rightarrow \text{riordino}$$

sottraggo righe per far saltare fuori l'identità

$$A_K = T^{-1} \cdot A T = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}

$$B_K = T^{-1} B = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} - B_1 \\ - B_2 \end{matrix} \qquad C_K = CT = \left[\begin{array}{c|cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

C_1 $\qquad$ C_2

$\dim R^+ = 3 \qquad \dim T_2 = 2$

Parte raggiungibile e inosservabile: $A_{22} \rightarrow$ modi 0^k, 1^k

B6)

$$H(z) = C(zI - A)^{-1} B + D \qquad \text{ha dimensione } \overset{2}{\underset{\|}{p}} \times \overset{2}{\underset{\|}{m}}$$

$$= C_1 (zI - \underset{\substack{\| \\ 0}}{A_{11}})^{-1} B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{z} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/z \\ 0 & 1/z \end{bmatrix}$$

B7)

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = x(\tilde{k}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in R^+$$

posso portarlo

$$R_{K_1} = \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{K_1 - 1} B \right] \underset{K_1 > n}{=} R$$

In un passo raggiungo $\operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

In due passi $\operatorname{im} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \tilde{K} = 2$

$$x(k_1) = A^k \cancel{x_0}^{\,0} + R_{k_1} U_{k_1} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[B \,\vdots\, AB \right] \begin{bmatrix} \underline{u}(0) \\ \underline{u}(1) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_1(1) \\ u_2(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} u_1(0) + u_2(0) = 0 \\ u_1(0) = 1 \\ u_1(0) = 1 \\ u_1(0) + u_1(1) = 0 \\ u_1(0) + u_1(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2(0) = -1 \\ u_1(0) = 1 \\ u_1(1) = -1 \\ u_2(1) = \,? \end{cases}$$

Esercizio forma canonica di controllo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, A^3B \,\vdots\, A^4B \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & & & * & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & Ab_1 & \dots & & A^2b_1 & \dots & \end{array}\right] \dots$$

$* \rightarrow$ linearmente indipendenti

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{R}^{-1}: \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \bar{R}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \nabla_1 = 3 \\ \leftarrow \nabla_2 = 4 \\ \leftarrow \nabla_3 = 5 \end{array}$$

dipende da b_1 b_2 ← b_3

$$\mu_1 = 3 \qquad \nabla_1 = \mu_1 = 3 \qquad q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = 1 \qquad \nabla_2 = \mu_1 + \mu_2 = 4 \qquad q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mu_3 = 1 \qquad \nabla_3 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 5 \qquad q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ q_1 A^2 \\ \hline q_2 \\ \hline q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_c = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ per forza con questo valore

$$B_c = TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio forma canonica osservabilità.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ \\ * \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{l} C \;\; c_1 \\ \;\;\;\; c_2 \\ CA \;\; c_1A \\ \;\;\;\; c_2A \\ CA^2 \;\; c_1A^2 \\ \;\;\;\; c_2A^2 \end{array}$$

Q ha rango massimo $\Rightarrow$ completamente osservabile.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selezione le prime righe lin. ind.

$\nu_1 = 3 \qquad \tilde{\nu}_1 = 3$

$\nu_2 = 1 \qquad \tilde{\nu}_2 = 4$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{riguarda } c_1 \\ \} \text{ riguarda } c_2 \end{array}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché} \\ \text{unitaria}}}{\bar{Q}^{-1} = \bar{Q}^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} & & \uparrow & \uparrow \\ & & q_1 & q_2 \end{array}$$

$A_0 = T^{-1} A T \qquad C_0 = CT$

$$T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ q_1 & Aq_1 & A^2q_1 & q_2 \end{matrix} \end{array} \qquad T^{-1} = T^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 1&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Esercizio

Determinare la stabilità, gli stati di equilibrio e il sottospazio di inosservabilità al variare di γ.

$$\Sigma \begin{cases} x(k+3) = \gamma x(k) \qquad \gamma \in \mathbb{R} \\ y(k) = x(k) \end{cases}$$

$$\underline{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ x(k+2) \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k+1) \\ x(k+2) \end{bmatrix} + 0\, u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + 0\, u(k) \end{cases}$$

$\dddot{x}(t) = u(t)$

$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

$x_1(t) = x(t)$

$x_2(t) = \dot{x}(t)$

$x_3(t) = \ddot{x}(t)$

$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Stati di equilibrio : $\text{Ker}(\mathbb{I} - A) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P_A(\lambda) = \lambda^3 - \gamma$

Passaggio tra stati

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Trovare $u(t)$ tale che passi da $x_0=x(0)=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ a $x(T)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, se possibile.

$R^+ = \operatorname{im} R = \operatorname{im}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ è completamente raggiungibile.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad B \quad AB$

$$W_r(0,T)=\int_0^T e^{A(T-\tau)}BB^T e^{A^T(T-\tau)}d\tau$$

$$x(T)=e^{AT}x(0)+\int_0^T e^{A(T-\tau)}B\underbrace{u(\tau)}_{=B^T e^{A^T(T-\tau)}\cdot\eta}d\tau$$

$$\Rightarrow x(T)-e^{AT}x(0)=W_r(0,T)\,\eta$$

$\lambda \to e^{\lambda t}$

$$e^{At}: \quad \begin{bmatrix}1\\e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_0\\ \gamma_1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix}\gamma_0=1\\ \gamma_1=e^t-1\end{matrix} \qquad e^{At}=\begin{bmatrix}e^t & 0\\ e^t-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$e^{A(T-\tau)}B=\begin{bmatrix}e^{T-\tau}\\ e^{T-\tau}-1\end{bmatrix}$$

$$W_r(0,T)=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{T-\tau}\\ e^{T-\tau}-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}e^{T-\tau} & e^{T-\tau}-1\end{bmatrix}d\tau=\int_0^T\begin{bmatrix}e^{2(T-\tau)} & (e^{T-\tau}-1)e^{T-\tau}\\ (e^{T-\tau}-1)e^{T-\tau} & e^{2(T-\tau)}\end{bmatrix}d\tau=$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2}[e^{2T}-1] & \frac{1}{2}e^{2T}-e^T+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}e^{2T}-e^T+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}(e^{2T}-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2e^T\\ 2e^T\end{bmatrix}$$

Esercizio

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$P_A(\lambda)=(\lambda-1)^2\lambda^2$ instabile.

1. Vedo se il sistema è raggiungibile

$$R = \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, A^3B\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \end{bmatrix}}_{b_1 \; b_2 \; Ab_1 \; Ab_2} \Rightarrow R^+ = \operatorname{im} R = \mathbb{R}^4 \quad \text{completamente raggiungibile.}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \mu_1 = 2 & \nu_1 = 2 \\ \mu_2 = 2 & \nu_2 = 4 \end{matrix} \qquad \bar{R}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \nu_1 \; q_1 \\ \\ \leftarrow \nu_2 \; q_2 \end{array}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \nu_1^\circ \\ \\ \leftarrow \nu_2^\circ \end{array}$$

$\eta_1 = 2$ $\quad \eta_2 = 2$

$$B_c = TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \bar{A}_c + \bar{B}_c A_m = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_c} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_m} \begin{array}{l} \leftarrow \nu_1^\circ \\ \leftarrow \nu_2^\circ \end{array}$$

$$B_c = \bar{B}_c \cdot B_m = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_c} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_m}$$

Il sistema è ora in forma canonica di controllo.

$$F = B_m^{-1} \left[A_{d_m} - A_m \right] T \quad \text{devo scegliere } A_d$$

Voglio spostare tutti gli autovalori in -1 e -2

$$\alpha_{des}(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda+1)^2 = (\lambda^2+4\lambda+4)(\lambda^2+2\lambda+1) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4$$

· Scelgo

$$A_d = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & -12 & -13 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{righe simili alla} \\ \text{struttura di } \bar{A}_c \\ \leftarrow \\ \leftarrow \text{coefficienti di } \alpha_{des}(\lambda) \text{ opposti} \end{array}$$

$$A_d = \bar{A}_c + \bar{B}_c A_{d_m}$$

$$A_d = \underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]}_{\bar{A}_c} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{B}_c} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -12 & -13 & -6 \end{bmatrix}}_{A_{d_m}} \begin{array}{l} \nabla_1^\circ \\ \nabla_2^\circ \end{array} \text{ di } A_d$$

$$F = \underset{\uparrow \atop I_d}{B_m^{-1}} \left[A_{d_m} - A_m\right] T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -12 & -13 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -16 & -12 & -13 & -7 \end{bmatrix}$$

$A+BF$ avrà proprio gli autovalori in -1 e -2.

· Scelgo un'altra matrice A_d:

$$A_d' = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 \\ P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{array}$$

Esercizio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ottimizzare, sapendo di non avere l'accesso allo stato, le prestazioni di questo sistema.

Guardo la stabilità:

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -3 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot (\lambda+2)\cdot(\lambda+2)(\lambda+1) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)^2$$

Il sistema è semplicemente stabile. Cerco di rendere stabile asintoticamente. Uso il teorema di separazione.

A. Cerco la matrice F, ma prima controllo che il sistema sia raggiungibile:

$$R^+ = \operatorname{im} R = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ non è completamente raggiung.

Cerco la forma standard:

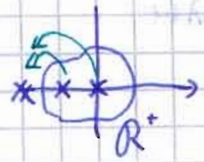
$$T_1 = R^+ \Rightarrow T = [T_1 \,\vdots\, T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = T^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_r = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

A_1, A_{12}, A_2

0 e −1 autovalori associati alla parte raggiungibile.

$$B_r = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B_1$$



$$\sigma(A_r + B_r F_r) = \sigma\left(\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} [F_1 \; F_2] \right) = \sigma \begin{pmatrix} A_1 + B_1 F_1 & A_{12} + B_1 F_2 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Devo fare la retroazione con il sistema (raggiungibile)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Adesso trovo F_r tale che $\sigma(A+BF) = \sigma(T^{-1}(A+BF)T) = \sigma(A_r + B_r F T) = \sigma(A_r + B_r F_r)$

Il sistema in forma canonica di controllo è:

$$R_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & A_1 b_1 & A_1 b_2 \end{array} \end{array} \qquad \bar{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} \mu_1 = 1 & \nu_1 = 1 \\ \mu_2 = 1 & \nu_2 = 2 \end{array}$$

$$\bar{R}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \nu_1^\circ \quad q_1 \\ \leftarrow \nu_2^\circ \quad q_2 \end{array} \qquad T_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = T_c\, A_1\, T_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_c = T_c B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ qui poteva esserci qualsiasi numero

Lemma di Brunowski

$$A_c = \bar{A}_c + \bar{B}_c A_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}}_{A_m}$$

$$B_c = \bar{B}_c B_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di retroazione

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -2$

$\lambda_3 = -1$

$$F = B_m^{-1} \left[A_{dm} - A_m \right] T_c$$ Devo trovare A_{dm}.

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

matrice desiderata

$P_{A_d} = (\lambda+2)^2$ perché voglio spostare gli autovalori in -

Deve avere la stessa struttura di $\bar{A}_c$ e $\bar{B}_c$.

Andava bene anche $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$A_{dm} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \overline{V}_1^\circ \text{ di } A_d \\ \leftarrow \overline{V}_2^\circ \quad " \quad " \end{array}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifico che

$$A_1 + B_1 F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ha autovalori in -2.

$$F_r = \left[\underbrace{\begin{matrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{matrix}}_{F_1} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}_{F_2} \right]$$ matrice di retroazione

F_2 scelta tanto la parte non raggiungibile non interessa.

Infine, trovo $F = F_r \cdot T^{-1}$

$$F = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifico che $A + BF$ ha autovalori in -2...

.B. Progetto l'osservatore asintotico

$A - KC$ deve far tendere l'errore a 0.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & 0 & 0 \\ K_3 & 0 & 0 & 0 \\ K_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -K_1 & -1 & 3 & -1 \\ -K_2 & -2 & 0 & 1 \\ -K_3 & 1 & -1 & 0 \\ -K_4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Pongo $K_2 = K_3 = K_4 = 0$ e $K_1 = 2$ così $A-KC$ ha autovalori in -2 e

$$K = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio Cap. 5

$$H_1(s) = \frac{1+s}{s^3-2} \qquad H_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{s} \\ \frac{s}{s-1} & \frac{s}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Trovare l'ordine di una realizzazione minima e, per $H_1(s)$, trovare A, B, C, D.

② $p_H(s) = (s-1)(s+1)s$ ordine $n=3$ sistema instabile internamente e esternam

$A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $C \in \mathbb{R}^{2\times3}$, $D \in \mathbb{R}^{2\times3}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

① L'ordine minimo è 3 e la realizzazione che troverò sarà minima (perché scalare).

$$H_1(s) = \frac{b_n s^n + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{0s^3 + 0s^2 + s + 1}{s^3 + 0s^2 + 0s - 2} \qquad D_c = b_n = 0$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\overset{n}{\downarrow}3\times1} \qquad A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_c = \begin{bmatrix} \underset{\underset{b_0}{b_0 - \cancel{b_n}a_0}}{1} & \underset{\underset{b_1}{b_1-\cancel{b_n}a_1}}{0} & \overset{\overset{b_2}{b_2-\cancel{b_n}a_2}}{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times3}$$

Cap. 6

Sia $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Trovare $u(t)$ tale che

$$J(x(t), u(t), t_0) = \int_{t_0}^{T} l(x(\tau), u(\tau))\, d\tau + m(x(T)) \quad \text{sia minimo.}$$

Solitamente, l e m sono funzioni quadratiche

$$J = \int_0^T \left[x^T(\tau) Q x(\tau) + u^T(\tau) R u(\tau)\right] d\tau + x^T(T) S_1 x(T).$$

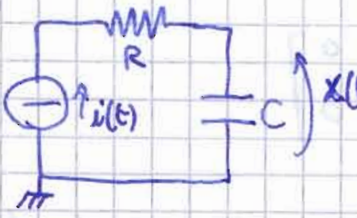
Voglio trovare $u(t)$, con $t \in [0,T]$, che minimizzi J.

$Q \geq 0$, $S_1 \geq 0$, $R > 0$

il secondo del peso di S_1, mi importa più o meno che all'istante T arrivi effettivamente dove volevo arrivare.

Q indica il percorso
R indica l'energia erogata
S_1 indica la posizione finale

Esempio



$$\dot{x}(t) = \frac{1}{C}\, i(t) = \frac{1}{C}\, u(t) \qquad x(0) = 10V$$

Voglio trovare un ingresso che mi porti a $x(T) = 0V$ (e questo lo so fare con i gramiani), minimizzando la carica sul condensatore e la corrente dissipata sulle resistenza.
Definisco l'indice di costo:

$$J = S_1\, x^2(T) + \int_0^T \left[R\, i^2(\tau) + Q\, x^2(\tau) \right] d\tau$$

Assegno $S_1 = R = Q = 1$ per dare lo stesso peso a annullamento di $x(T)$, corrente dissipata e carica sul condensatore.

21/1/2011

Retroazione → allocare $\nabla(A + B\overset{\downarrow}{F})$
Osservatori → allocare $\nabla(A - \underset{\uparrow}{K}C)$

$$\nabla(A - KC) = \nabla(A - KC)^T = \nabla(A^T - C^T K^T) = \nabla(A^T + C^T(-K^T)) = \nabla(\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}) \quad \text{con } \tilde{A} = A^T,\ \tilde{B} = C^T,\ \tilde{F} = -K^T$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{B} = C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

È come se dovessi trovare una retroazione

Supponendo di essere in forma canonica di controllo, il sistema retroazionato

$$A_c + B_c F_c = \underbrace{\bar{A}_c + \bar{B}_c A_m}_{A_c} + \underbrace{\bar{B}_c B_m}_{B_c} \bar{F}_c = \bar{A}_c + \bar{B}_c \left[A_m + B_m F_c\right]$$

lemma di Brunowski

$$A_d = \bar{A}_c + \bar{B}_c \cdot A_{d_m}$$

Impongo che il sistema retroazionato sia uguale a A_d, cioè:

$$A_{d_m} = A_m + B_m F_c \;\rightarrow\; F_c = B_m^{-1}\left[A_{d_m} - A_m\right]$$

Adesso devo tornare indietro, da $\sigma(A_c + B_c F_c)$ a $\sigma(A+BF)$.

$$\sigma(A+BF) = \sigma\left(T(A+BF)T^{-1}\right) = \sigma\left(TAT^{-1} + TBFT^{-1}\right) \rightarrow F_c = FT^{-1} \qquad F = F_c T$$

$$F = B_m^{-1}\left(A_{d_m} - A_m\right)T.$$

Vediamo ora lo stesso tipo di teoria per gli osservatori. Devo allocare gli autovalori di $\sigma(A-KC)$. Supponiamo di essere un sistema multivariabile ($n°$ uscite $p>1$).

Poniamoci in forma canonica di osservazione. A_o, C_o.

$$A_o = T^{-1}AT \qquad C_o = CT \qquad \left[\begin{aligned} A_o &= \bar{A}_o + A_p \bar{C}_o \\ C_o &= C_p \bar{C}_o \end{aligned}\right] \text{ Lemma di Brunowski}$$

$$\begin{array}{l} \text{indice } 3 \\ \\ \end{array} A_o = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \\ 1 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * \\ \hline 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right] \text{ indice } 4$$

$$\nu_1 = 3 \qquad \nu_2 = 3+4 = 7$$

$$C_o = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right]$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{bmatrix} \qquad A_o = A_c^T \qquad B_c = \begin{array}{cccc} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & * & * & \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & & & \end{array} \qquad C_o = B_c^T.$$

Devo allocare $\nabla(A_0 - K_0 C_0)$.

$$A_0 - K_0 C_0 = \underbrace{\bar{A}_0 + A_p \bar{C}_0}_{A_0} - K_0 C_p \bar{C}_0 = \bar{A}_0 + (A_p - K_0 C_p)\bar{C}_0$$

$\hookrightarrow$ p colonne di A_0 partendo da sinistra, prendendo la ∇_1° e la ∇_2°

Stessa struttura di $A-KC$.

Trovo A_d che ha autovalori nei punti esatti di dove voglio spostare gli autovalori di $A_0 - K_0C_0$. Deve avere poi la stessa struttura di $A_0 - K_0 C_0$.

$A_d = \bar{A}_0 + A_{dp}\bar{C}_0$ eguaglio con $A_0 - K_0 C_0$.

$\downarrow$ p colonne di A_d ($\nabla_1^\circ, \nabla_2^\circ \dots$)

$$\bar{A}_0 + (A_p - K_0 C_p)\bar{C}_0 = \bar{A}_0 + A_{dp}\bar{C}_0 \rightarrow A_{dp} = A_p - K_0 C_p \Rightarrow K_0 = (A_p - A_{dp})C_p^{-1}.$$

Infine, devo tornare indietro da $\nabla(A_0 - K_0 C_0)$ a $\nabla(A - KC)$.

$$\nabla(A_0 - K_0C_0) = \nabla(T^{-1}AT - K_0 CT) = \nabla(T^{-1}(A-KC)T) \Rightarrow \boxed{K = T(A_p - A_{dp})C_p^{-1}}$$

Esempio: allocare autovalori in -2

$$(\lambda+2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 \longrightarrow A_0 = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & -8 & & & & \\ 1 & 0 & -12 & & & 0 & \\ 0 & 1 & -6 & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 & * \\ & 0 & & 1 & 0 & 0 & * \\ & & & 0 & 1 & 0 & * \\ & & & 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right) (\lambda+2)^4 \dots$$

Esercizio

Progettare un osservatore asintotico per il sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Controllo come sono gli autovalori di A.

$\det(\lambda I - A) = 0$

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ -4 & \lambda & 0 & -2 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)\left[-3(2+\lambda) + \lambda(\lambda^2-4)\right] = (\lambda-1)\left[(\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda-3)\right] = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda-3)$$

Il sistema è instabile. Devo spostare gli autovalori in +1 e +3.

Uso la forma canonica di osservazione. Ma prima controllo che il sistema sia completamente osservabile.

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \\ c_1A \\ c_2A \\ \\ \end{array} \Rightarrow \operatorname{Ker} Q = 0 \Rightarrow \text{completamente osservabile.}$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} c_1 \\ c_1A \\ c_2 \\ c_2A \end{array} \qquad \varphi_1 = 2 \Rightarrow \tilde{\nu}_1 = 2, \qquad \varphi_2 = 2 \quad \tilde{\nu}_2 = 4 = 2+2$$

$$\bar{Q}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & \uparrow & & \uparrow \\ & \tilde{q}_1 & & \tilde{q}_2 \end{array}$$

$$T = \left[\tilde{q}_1 \,\vdots\, A\tilde{q}_1 \,\vdots\, \tilde{q}_2 \,\vdots\, A\tilde{q}_2\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_o = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_o = CT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lemma di Brunowski:

$$A_o = \bar{A}_o + A_p \bar{C}_o$$

$$C_o = C_p \bar{C}_o$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & -2 \\ 6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\bar{A}_0)$ Struttura di A_0 e 0 il resto

(A_p) $\tilde{\nabla}_1^\circ$ e $\tilde{\nabla}_2^\circ$ colonna di A_0

$(\bar{C}_0) \rightarrow$ struttura di C_0 (casualmente uguale a C_0)

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∇_1° e ∇_2° colonne di C_0 (C_p)

$(\bar{C}_0)$

Scelgo A_d in modo che gli autovalori vadano, ad esempio, 2 in -2 e 2 in -3. A_d deve avere:

- struttura di A_0
- polinomio caratteristico: $P_{des}(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda+3)^2 = (\lambda^2+4\lambda+4)(\lambda^2+6\lambda+9) \Rightarrow$

$$A_d = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -4 & & \\ 1 & -4 & & \bigcirc \\ \hline & & 0 & -9 \\ \bigcirc & & 1 & -6 \end{array}\right]$$

struttura

oppure $P_{des} = (\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+3) = (\lambda^2+5\lambda+6)(\lambda^2+5\lambda+6)$

$$A_d' = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -6 & & \\ 1 & -5 & & \bigcirc \\ \hline & & 0 & -6 \\ \bigcirc & & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$A_{dp} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & -9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{oppure} \quad A_{dp}' = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -5 & 0 \\ 0 & -6 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$K = T(A_p - A_{dp})C_p^{-1} \ldots$

Esercizio.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0\\1&2&0&0&0&0\\0&0&0&-2&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Migliorare le prestazioni del sistema. Progetto sia l'osservatore (non ho accesso allo stato) che la retroazione.
Per il teorema di separazione posso fare separatamente le due cose.

Determino gli autovalori:

$$\det(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda&-1&0&0&0&0\\-1&\lambda&0&-1&0&0\\-1&-2&\lambda&0&0&0\\0&0&0&\lambda+2&0&0\\0&0&0&0&\lambda+1&0\\0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\lambda(\lambda^2-1)=\lambda^2(\lambda+1)^2(\lambda-1)(\lambda+2)$$

Controllo la raggiungibilità:

$$R=\left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \dots\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}0&0&0&1&0&0&0&0&0&\\1&0&0&0&0&0&1&0&0&\\0&0&0&2&0&0&1&0&0&\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\0&1&0&0&-1&0&0&1&0&\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c|c}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right]\neq\mathbb{R}^6=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\mathcal{R}^+$$

Faccio la forma standard di raggiungibilità:

$$A_r=T^{-1}AT\qquad T=\left[T_1 \,\vdots\, T_2\right]\qquad \operatorname{im}T_1=\mathcal{R}^+\qquad A_r=\left[\begin{array}{c|c}A_1&A_{12}\\\hline 0&A_2\end{array}\right]\qquad B_r=\left[\begin{array}{c}B_1\\\hline 0\end{array}\right]=T^{-1}B$$

$$T=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right]\qquad \underset{\uparrow\atop T\text{ unitaria}}{T^{-1}=T^T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_r=T^{-1}AT=T^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1\\1&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-2\\0&0&0&-1&0&0\\ \dots\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccccc|c}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&1\\1&2&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\ \dots\end{array}\right]$$

$$B_r = \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ \hline 0&0&0 \end{bmatrix}$$

L'unico autovalore che non possiamo spostare è quello in -2.
Sposto gli autovalori tutti in -2 con una retroazione su A_1

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 1&2&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$$

Trovo il sottospazio di raggiungibilità:

$$R = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 0&0&0&1&0&0&0& \\ 1&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&2&0&0&1& \\ 0&1&0&0&-1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0 \end{array} \cdots \right] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&2&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \\ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_{1A} \ c_{2A} \end{array}$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 0&2&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \mu_1 = 3 & \nabla_1 = 3 \\ \mu_2 = 1 & \nabla_2 = 4 \\ \mu_3 = 1 & \nabla_3 = 5 \end{array}$$

$$\bar{R}^{-1} \to \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&\cancel{1}0&0&0 \\ 0&\cancel{2}0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ \cancel{0}2&1&\cancel{0}1&0&0 \\ \cancel{0}-2&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \to \bar{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 2&1&-1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ -2&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow q_1 \\ \leftarrow q_2 \\ \leftarrow q_3 \end{array}$$

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} q_1 \\ q_1 A_1 \\ q_1 A_1^2 \end{matrix}}_{\nabla_1 = 3} \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{T}^{-1} \to \begin{bmatrix} -\cancel{2}0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&\cancel{0}2&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&2&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \tilde{T} A \tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&2&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ \hline 0&0&0&-1&0 \\ \hline 0&0&0&0&0 \end{array}\right] \quad \nabla_1 = 3, \ \nabla_2 = 1, \ \nabla_3 = 1$$

$$B_c = B\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ \hline 0&1&0 \\ \hline 0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$A_c = \bar{A}_c + \bar{B}_c A_m = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \nabla_1^\circ \\ \leftarrow \nabla_2^\circ \\ \leftarrow \nabla_3^\circ \end{matrix} \ \text{riga di } A_c$$

$$B_c = \bar{B}_c B_m = \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix}.$$

Trovo la matrice F di retroazione

$$F_1 = B_m^{-1}(A_{dm} - A_m)\tilde{T}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ -8&-12&-6&0&0\\ 0&0&0&-2&0\\ 0&0&0&0&-2 \end{bmatrix} \qquad p_{A_d}(\lambda) = (\lambda+2)^3\cdot(\lambda+2)(\lambda+2) = (\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8)(\lambda+2)(\lambda+2)$$

oppure $p_{A_d'}(\lambda) = (\lambda+2)^3(\lambda+2)^2 = (\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8)(\lambda^2+4\lambda+4)$ $\quad A_d' = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ -8&-12&-6&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&-4&-4 \end{bmatrix}$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ -8&-12&-6&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&-4&-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -8&-12&-6&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&-4&-4 \end{bmatrix}}_{A_{dm}}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8&-13&-6&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&-4&-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3&-6&-8&0&0\\ 0&0&0&1&1\\ 0&0&0&-4&-4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_{12}\\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1\\ --\\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + B_1F_1 & A_{12} + B_1F_2 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right] \qquad \text{Scelgo } F_2 = \begin{bmatrix} 0\\0\\0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 3&-6&-8&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&-4&-4&0 \end{bmatrix} \qquad \text{Ora devo tornare indietro.}$$

$$\nabla(A+BF) = \nabla(\tilde{T}^{-1}(A+BF)\tilde{T}) = \nabla(A_r + B_r \underbrace{F\tilde{T}}_{\tilde{F}})$$

$$F = \tilde{F}T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Esercizi

①

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$J = \int_0^{+\infty} (x_1^2(t) + 2u^2(t))\,dt$ Devo trovare $S(t)$.

$S(t) = S$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R = [2]$ ingresso unico

Equazione di Riccati $\rightarrow$ $0 = A^T S + SA + Q - SBR^{-1}B^T S$

Devo trovare S semidefinita positiva e simmetrica $S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a-b & b-c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a-b \\ 0 & b-c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2b \\ 2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2b & 2c \end{bmatrix} =$$

$$0 = \begin{bmatrix} 1 & a-b \\ a-b & 2(b-c) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2b^2 & 2bc \\ 2bc & 2c^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1 = 2b^2 \\ a-b = 2bc \\ 2(b-c) = 2c^2 \end{cases} \quad b = \pm 1/\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} b = 1/\sqrt{2} \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

Osservatore

$$A_{ST.OSS.} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}$$ $\Sigma(A_1, C_1)$ parte completamente osservabile

$$C_{ST.OSS.} = CT = \left[C_1 \;\vdots\; 0 \right]$$ $\nabla(A_1 - K_1C_1)$ A_2 non riesco a spostarlo (parte reale negativa se no stop).

$$\nabla(A-KC) = \nabla(T^{-1}(A-KC)T) = \nabla(A_{ST.OSS} - \underbrace{T^{-1}K}_{K_{ST.OSS}} \cdot C_{ST.OSS})$$ $K_{ST.OSS.} = T^{-1}K$

$\downarrow$

$K = TK_{ST.OSS.}$

$$K_{S.OSS} = \begin{bmatrix} K_1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D = [0]$$

Determinare F tale che $u(t) = Fx(t) + r(t)$ che renda il sistema retroazionato completamente osservabile.

$\Sigma(A+BF, C)$ $$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & * & -4 \end{bmatrix}$$ affinché sia completamente osservabile.

$$A+BF = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1-2 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5-2 & f_6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Devo porre $f_4 = f_5 = f_6 = f_3 = f_1 = 0$ e $f_2 = 1$ (ad esempio)

$$A+BF = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

N.B. deve essere $D=0$ altrimenti $C \to C+DF$ e $Du(t) \to D(Fx+r)$

$$Q_{A+BF} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$ } 3 righe lin. indip.

$(A+BF) \cdot C$.

Forma di Ackermann.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Progettare una F che metta gli autovalori in $\pm jk$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = [0]$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha_{des}(\lambda) = \lambda^2 + k^2 \qquad \alpha_{des}(A) = A^2 + k^2 I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k^2 & \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$F = -e_n^T R^{-1} \alpha_{des}(A) \underset{n=2}{=} -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4+k^2 & 0 \\ 0 & 4+k^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4+k^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizzazione $\rightarrow$ trovare A, B, C, D

$$H(s) = \frac{s+1}{s^3} \qquad n = 3 \qquad m = 1 \qquad p = 1$$

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad D = b_n = \lim_{s \to +\infty} H(s) = 0$$

Essendo una realizzazione dell'osservatore, dovrà essere in forma canonica di controllo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ -a_0 \ -a_1 \ -a_2 \end{array} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & \vdots & b_1 - b_n a_1 & \vdots & \ldots & \vdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$